Oscilaciones amortiguadas

D. Sierra-Porta

Índice

1. Resumen

¿Qué pasaría si *Spider-man* luego de lanzar unas de sus telarañas, no lanzara otra? La respuesta es sencilla, spiderman empezaría a oscilar tal y como lo haría un péndulo o un niño en un columpio. Sin embargo, luego de varias oscilaciones todos sabemos que poco a poco nos iremos deteniendo, esto es debido a que en la realidad, el péndulo así como el sistema masa-resorte es un caso demasiado idealizado. En realidad las fuerzas de fricción (que hemos despreciado antes) siempre están presentes. De manera que en los casos físicos interesantes estas fuerzas deben ser consideradas.

Una cuerda de guitarra deja de oscilar unos segundos después de ser perturbada. Para mantener a un niño feliz en un columpio, debes seguir empujando. Aunque a menudo podemos hacer que la fricción y otras fuerzas no conservadoras sean insignificantemente pequeñas, el movimiento completamente no amortiguado es raro. De hecho, incluso podemos querer amortiguar las oscilaciones, como con los amortiguadores de automóviles.

Para un sistema que tiene una pequeña cantidad de amortiguamiento, el período y la frecuencia son casi los mismos que para el movimiento armónico simple, pero la amplitud disminuye gradualmente como se se puede ver en el caso de la cuerda de la guitarra. Esto ocurre porque la fuerza de amortiguación no conservadora elimina la energía del sistema, generalmente en forma de energía térmica. En general, la eliminación de energía por fuerzas no conservativas se describe como

$$W_{nc} = \Delta\left(K + U\right), \tag{1}$$

donde W_{nc} es un trabajo realizado por una fuerza no conservadora (aquí la fuerza de amortiguación). Para un oscilador armónico amortiguado, W_{nc} es negativo porque elimina la energía mecánica $(K + U)$ del sistema.

Los osciladores armónicos amortiguados son sistemas vibratorios para los cuales la amplitud de la vibración disminuye con el tiempo. Dado que casi todos los sistemas físicos implican consideraciones como la resistencia del aire, la fricción y las fuerzas intermoleculares donde la energía en el sistema se pierde por el calor o el sonido, es importante tener en cuenta la amortiguación en los sistemas oscilatorios realistas. Los ejemplos de osciladores armónicos amortiguados incluyen cualquier sistema oscilatorio real como un yoyo, un péndulo de reloj o una cuerda de guitarra: después de comenzar a vibrar la cuerda de yoyo, reloj o guitarra, la vibración se ralentiza y se detiene con el tiempo, correspondiente a la descomposición de volumen de sonido o amplitud en general.

Matemáticamente, los sistemas amortiguados se modelan típicamente mediante osciladores armónicos simples con fuerzas de amortiguación viscosas, que son proporcionales a la velocidad del sistema y permiten una solución fácil de la segunda ley de Newton en forma cerrada. Estas son ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden que incluyen un término proporcional a la primera derivada de la amplitud. Como se describe a continuación, la magnitud de la proporcionalidad describe la rapidez con que las vibraciones del oscilador amortiguado se reducen a nada.

2. Antes de todo

Una ecuación diferencial lineal de segundo orden tiene la forma

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = G(x), \quad (2)$$

donde, $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, y $G(x)$ son funciones continuas. Las ecuaciones de este tipo surge en el estudio del movimiento de un resorte. En esta sección estudiamos el caso donde, $G(x) = 0$, para todo x, en la ecuación anterior. Tales ecuaciones se llaman ecuaciones lineales homogéneas. Por lo tanto, la forma de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden es

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0, \quad (3)$$

Dos hechos básicos nos permiten resolver ecuaciones lineales homogéneas. El primero de estos dice que si conocemos dos soluciones y_1 y y_2 de tal ecuación, entonces la combinación lineal $c_1y_1 + c_2y_2$ también es una solución.

El otro hecho que necesitamos viene dado por el siguiente teorema, que se demuestra en cursos más avanzados. Dice que la solución general es una combinación lineal de dos soluciones y_1 y y_2 linealmente independientes. Esto significa que ni y_1 ni y_2 es un múltiplo constante de la otra. Por ejemplo, las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 4x^2$ son linealmente dependientes, pero $f(x) = e^x$ y $g(x) = xe^x$ son linealmente independientes.

En general, no es fácil descubrir soluciones particulares para una ecuación lineal de segundo orden. Pero siempre es posible hacerlo si los coeficientes $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ son funciones constantes, es decir, si la ecuación diferencial tiene la forma donde, $ay'' + by + c = 0$ con a, b y c constantes y $a \neq 0$.

No es difícil pensar en algunos candidatos probables para soluciones particulares de la Ecuación anterior si establecemos la ecuación verbalmente. Estamos buscando una función tal que una constante multiplicada por su segunda derivada más otra constante por la primera derivada más una tercera constante sea igual a 0. Sabemos que la función exponencial e^{rx} (donde r es una constante) tiene la propiedad de que su derivada es un múltiplo constante de sí mismo: $y' = re^{rx}$ y $y'' = r^2e^{rx}$. Si sustituimos estas expresiones en la Ecuación anterior, vemos que e^{rx} es una solución si

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0, \quad (4)$$

y ya que e^{rx} nunca es 0, entonces $ar^2 + br + c = 0$. Por lo tanto, a la ecuación polinómica $ar^2 + br + c = 0$ se le llama ecuación auxiliar (o ecuación característica) de La ecuación diferencial. Observe que es una ecuación algebraica que se obtiene de la ecuación diferencial reemplazando y'' por r^2, y' por r y y por 1. Algunas veces las raíces y la ecuación auxiliar se pueden encontrar factorizando. En otros casos, se encuentran utilizando la fórmula cuadrática:

$$r_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (5)$$

Hay tres casos posibles:

1. Si las raíces $r_{\pm}$ de la ecuación auxiliar son reales y desiguales, entonces la solución general de $ay''+by+c = 0$ es $y(x) = c_1e^{r_+x} + c_2e^{r_-x}$.

2. Si las raíces $r_{\pm}$ de la ecuación auxiliar son reales y pero iguales, es decir $r_+ = r_- = r$, entonces la solución general de $ay'' + by + c = 0$ es $y(x) = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx}$.

3. Si las raíces $r_{\pm}$ de la ecuación auxiliar son números complejos, es decir $r_+ = \alpha + i\beta$ y $r_- = \alpha - i\beta$, que siempre vendrán a pares un número y su conjugado, entonces la solución general de $ay'' + by + c = 0$ es $y(x) = (c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)e^{\alpha x}$.

Los coeficientes c_1 y c_2 de las expresiones anteriores serán siempre fijados por las condiciones iniciales del sistema, esto es bajo la consideración de los valores de la función solución y su derivada en algún valor dado de x, o sea

$$y_0 = y(x = 0), \qquad y_0' = dy/dx|_{(x=0)}. \quad (6)$$

Con esto será suficiente para lo que viene pero seguro si quiere profundizar más puede consultar cualquier libro de ecuaciones diferenciales.

3. Oscilaciones amortiguadas

La figura 1 muestra una masa m unida a un resorte con una fuerza constante $-kx$. La masa se eleva a una posición con amplitud inicial A_0, y luego es liberada. La masa oscila alrededor de la posición de equilibrio en un fluido con viscosidad η, pero la amplitud disminuye para cada oscilación. Para un sistema que tiene una pequeña cantidad de amortiguamiento, el período y la frecuencia son constantes y son casi los mismos, pero la amplitud disminuye gradualmente como se muestra. Esto ocurre porque la fuerza de amortiguación no conservadora elimina la energía del sistema, generalmente en forma de energía térmica.

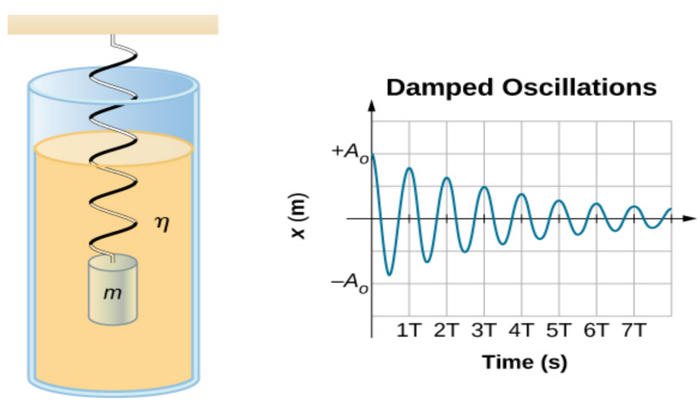


Fig. 1: Un sistema oscilante sometido a la fuerza de fricción que le ocasiona la viscosidad del líquido en el cual se encuentra la masa.

Considere las fuerzas que actúan sobre la masa. Tenga en cuenta que la única contribución del peso es cambiar la posición de equilibrio, como se discutió anteriormente en el capítulo. Por lo tanto, la fuerza neta es igual a la fuerza del resorte y la fuerza de amortiguación F_γ. Si la magnitud de la velocidad es pequeña, lo que significa que la masa oscila lentamente, la fuerza de amortiguación es proporcional a la velocidad y actúa en contra de la dirección del movimiento

$$F_\gamma = -\gamma v = -\gamma \frac{dx}{dt}, \tag{7}$$

donde γ es una constante de proporcionalidad que mide la magnitud o intensidad de la amortiguación, cuan fuerte o no es el frenado de la masa debido a la fricción con el fluido.

Generalmente la fuerza de amortiguamiento depende de varios factores y depende definitivamente de la naturaleza del medio circundante, sin embargo una buena primera aproximación es suponer que la misma depende de la velocidad puesto que en reposo la masa no experimenta ningún amortiguamiento.

Por lo tanto, suponiendo que el eje X es el vertical mismo en donde se mueve la masa m, la fuerza neta sobre la masa es

$$\sum F_x = F_k - F_\gamma = ma_y = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt}, \tag{8}$$

en notación de Newton tenemos que

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0, \tag{9}$$

o dividiendo por m toda la ecuación, tenemos que

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{10}$$

donde hemos definido $\omega_0^2 = k/m$ (coincide con la frecuencia natural de oscilación como antes en el oscilador armónico simple) y $\gamma = 2\beta m$. Las escogencias de estas redefiniciones son arbitrarias pero luego cobrarán sentido físico y además para facilitar las matemáticas. La ecuación anterior representa la dinámica de una partícula se me mueve como un oscilador que pierde energía debido a disipación de energía en el medio. El parámetro $omega_0$, como antes tiene unidades de rad s^{-1}, mientras que γ al tener unidades de fuerza dividida por velocidad tiene unidades de kg/s y por lo tanto el parámetro nuevo β tiene las misma unidades de ω_0.

El lo que sigue vamos a resolver la ecuación diferencial anterior la cual es de primer orden lineal. Necesitamos una función cuya segunda y primera derivada sean iguales a la función sin derivar. La función más simple que cumple estos requisitos es la función exponencial, por lo cual podemos suponer en primera instancia que la solución es

$$x(t) = e^{\lambda t}, \tag{11}$$

donde λ es una constante arbitraria. Además de esta solución, dado que la ecuación es de segundo orden, necesitamos dos condiciones iniciales para determinar todas las constantes de integración, las cuales pueden ser la posición y la velocidad inicial del movimiento. La primera determina la amplitud inicial del movimiento, mientras que la segunda determina la velocidad inicial como la que empieza a moverse la masa m.

Derivando la primera y segunda vez la solución (11) e introduciéndoles en la ecuación diferencial del movimiento (10) se tiene que $v = \dot{x} = \lambda \exp \lambda t$ y $a = \dot{v} = \ddot{x} = \lambda^2 \exp \lambda t$, con lo cual

$$\left(\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2\right) e^{\lambda t} = 0, \tag{12}$$

y dado que la función exponencial no puede ser cero entonces eso restringe los valores de λ, tal que

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0 \to \lambda = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}, \tag{13}$$

lo que implica que las dos soluciones disponibles son $\lambda_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ y $\lambda_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$.

La forma tan simple de la solución anterior para λ justifica ahora la escogencia de las redefiniciones hechas anteriormente. Existe algo importante que rescatar de la solución anterior

- Dado que $\beta^2 - \omega_0^2 < \beta^2$ entonces las dos soluciones de (13) son negativas, siendo la primera la mayor de ellas (λ_1).
- además dependiendo del valor de β se pueden tener tres tipos de situaciones las cuales hay que analizar cada una de ellas, es decir, hay tres casos de interés: (a) $\beta > \omega_0$, (b) $\beta = \omega_0$ y (c) $\beta < \omega_0$.
  - El caso $\beta > \omega_0$, implica que el amortiguamiento es mayor que la frecuencia natural de oscilación, a este caso se le llama *Sobreamortiguamiento* o *Movimiento sobreamortiguado*.
  - El caso $\beta = \omega_0$, implica que el amortiguamiento es igual que la frecuencia natural de oscilación, a este caso se le llama *Amortiguamiento crítico* o *Movimiento críticamente amortiguado*.
  - El caso $\beta < \omega_0$, implica que el amortiguamiento es menor que la frecuencia natural de oscilación, a este caso se le llama *Subamortiguamiento* o *Movimiento subamortiguado*.

En lo que sigue analizaremos cada caso por separado y veremos las condiciones y comportamientos de cada uno en términos de los valores particulares de $\beta = \frac{\gamma}{2m}$.

3.1. Caso 1: Movimiento sobreamortiguado

En este caso tenemos entonces que $\beta > \omega_0$ y por lo tanto la cantidad en la raíz cuadrada en (13) es positiva y por lo tanto la ecuación para λ tiene dos raíces reales y negativas las cuales son $\lambda_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ y $\lambda_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$, con lo cual, la solución para el **Oscilador sobreamortiguado** resulta completamente

$$x(t) = c_1 e^{-|\lambda_1|t} + c_2 e^{-|\lambda_2|t}, \tag{14}$$

las constantes c_1 y c_2 son constantes de integración y se determinan a partir de las condiciones iniciales:

$$x_0 = c_1 + c_2, \quad v_0 = -\lambda_1 c_1 - \lambda_2 c_2, \tag{15}$$

o bien

$$c_1 = \frac{\beta x_0 + x_0\sqrt{\beta^2 - \omega 0^2} + v_0}{2\sqrt{\beta^2 - \omega 0^2}},$$
$$c_2 = -\frac{\beta x_0 - x_0\sqrt{\beta^2 - \omega 0^2} + v_0}{2\sqrt{\beta^2 - \omega 0^2}}. \tag{16}$$

La figura (2) muestra el comportamiento de un oscilador sobreamortiguado con $k = 0.4$ N/m, $m = 200$ g, $\gamma = 0.7$ kg/s, $x_0 = 40$ cm, $v_0 = 50$ cm/s. Véase como la segunda solución es siempre menor que la primera y la solución total combinada es la suma de cada una de las partes. Dado que λ_2 es menor que λ_1, la solución segundo decae mucho más rápido y por lo tanto la mayor contribución se realiza a partir de λ_1.

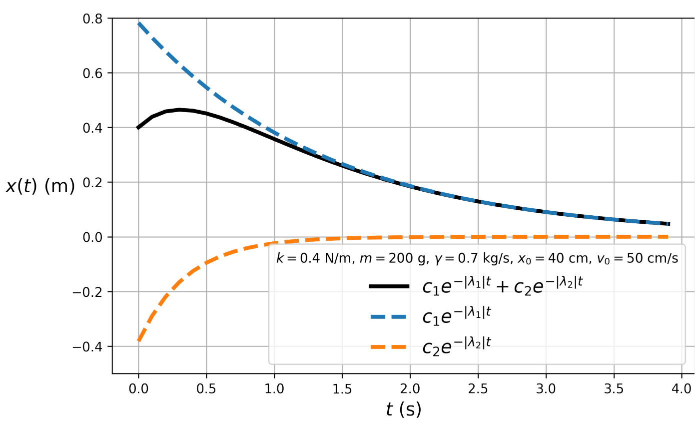


Fig. 2: Un oscilador sobreamortiguado con $k = 0.4$ N/m, $m = 200$ g, $\gamma = 0.7$ kg/s, $x_0 = 40$ cm, $v_0 = 50$ cm/s.

Analicemos esto físicamente. Cuando la amortiguación es grande, la fuerza de fricción es tan grande que el sistema no puede oscilar. Puede sonar extraño, pero un oscilador armónico sobreamortiguado no forzado no oscila. Dado que ambos exponentes son negativos, cada solución en este caso va asintóticamente al equilibrio $x = 0$. En la parte superior de muchas puertas hay un resorte para cerrarlas automáticamente. El resorte se amortigua para controlar la velocidad a la que se cierra la puerta. Si el amortiguador es lo suficientemente fuerte, de modo que el resorte esté sobreamortiguado, entonces la puerta simplemente se vuelve a colocar en la posición de equilibrio (es decir, la posición cerrada) sin oscilar, lo que generalmente es lo que se desea en este caso.

Ejemplo: Un sistema sobreamortiguado.

Demuestre que el sistema $\ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = 0$ está sobreamortiguado y graficar la solución con condiciones iniciales $x(0) = 1$, $x(0) = 0$. ¿Qué raíz controla qué tan rápido la solución vuelve al equilibrio?

Solución: La ecuación característica es $s^2 + 4s + 3 = 0$, que posee las raíces características $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -3$. En este caso la solución general es

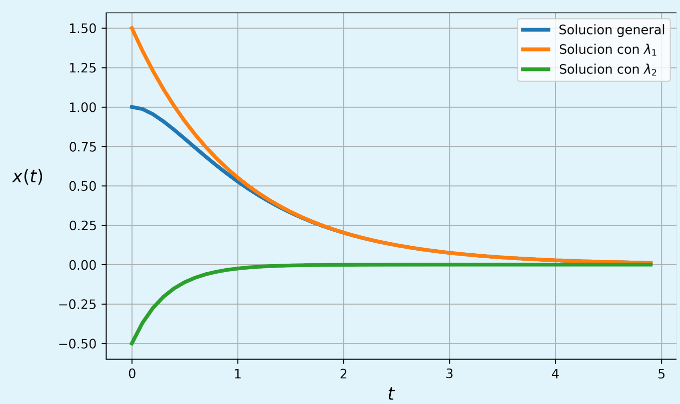
$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t}.$$

Debido a que las raíces son reales y diferentes, el sistema está sobreamortiguado. Las condiciones iniciales se satisfacen cuando $c_1 = 3/2$ y $c_2 = -1/2$. Entonces,

$$x(t) = \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}.$$

Evidentemente ya que $\lambda_1 > \lambda_2$ entonces la raíz λ_1 contribuye con la mayor cantidad de información a la solución general.

Debido a que e^{-t} va a 0 más lentamente que $e^{-3t/2}$, controla la velocidad a la que x va a 0. (Recuerde, es el término que va a cero el término más lento que controla la velocidad).



3.2. Caso 2: Movimiento Críticamente Amortiguado

En este caso $\beta = \omega_0$, y por lo tanto $\lambda_1 = \lambda_2$ por lo cual se tienen dos raíces reales pero iguales. Luego se desprende que la solución $c_1 e^{-|\lambda_1|t}$ es la misma que $c_2 e^{-|\lambda_2|t}$ y entonces tenemos dos soluciones que son linealmente dependientes. Para romper la dependencia lineal uno puede mostrar que la solución para el **Oscilador críticamente amortiguado** es entonces

$$\begin{aligned} x(t) = (c_1 + c_2 t)\, e^{-|\lambda_c|t} &= (c_1 + c_2 t)\, e^{-\beta t} \\ &= (c_1 + c_2 t)\, e^{-\frac{\gamma}{2m}t}, \end{aligned} \tag{17}$$

con λ_c es la solución con $\beta = \omega_0$.

Véase que en este caso particularmente

$$\beta = \omega_0 \to \gamma = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\sqrt{km}, \tag{18}$$

por lo que el factor de amortiguamiento está fijo a partir de su frecuencia natural. Como en el caso sobreamortiguado, este no oscila. Vale la pena señalar que para un m y k fijo, elegir b como el valor crítico de amortiguación proporciona el retorno más rápido del sistema a su posición de equilibrio. En el diseño de ingeniería, esto es a menudo una propiedad deseable. Los coeficientes c_1 y c_2 se obtienen de la misma forma como en el caso anterior,

$$c_1 = x_0, \quad c_2 = \beta x_0 + v_0 = \frac{\gamma}{2m}x_0 + v_0 \tag{19}$$

por lo que el movimiento críticamente amortiguado ocurre como

$$x(t) = [x_0 + (2m\gamma x_0 + v_0)t]\, e^{-\frac{\gamma}{2m}t}. \tag{20}$$

La figura (3) muestra el comportamiento de un oscilador críticamente amortiguado con $k = 0.4$ N/m, $m = 200$ g, $x_0 = 50$ cm, $v_0 = 20$ cm/s, y $\gamma = (0.3, 0.5, 0.7, 1.2)$ kg/s. Véase que el sistema nunca oscila y siempre decae. Por su puesto, cuanto mayor sea el factor de amortiguamiento, mayor será el decaimiento.

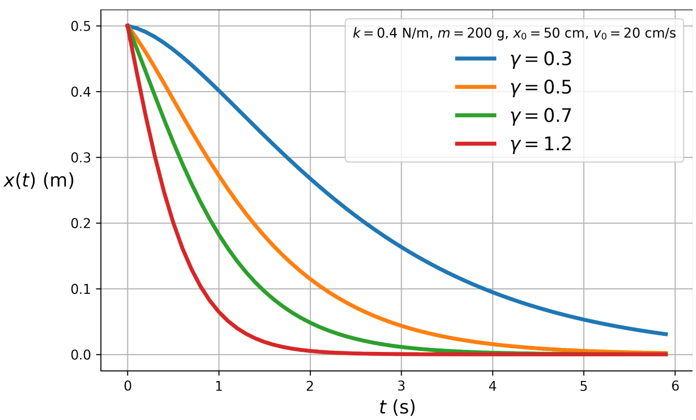


Fig. 3: Un oscilador críticamente amortiguado con $k = 0.4$ N/m, $m = 200$ g, $x_0 = 50$ cm, $v_0 = 20$ cm/s, y $\gamma = (0.3, 0.5, 0.7, 1.2)$ kg/s.

Ejemplo: Un sistema críticamente amortiguado.

Muestre que el sistema $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$ está críticamente amortiguado y graficar la solución con condiciones iniciales $x(0) = 1$, $x(0) = 0$.

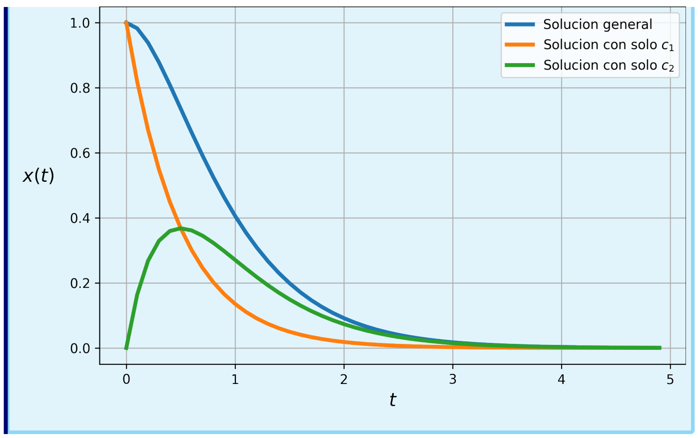
Solución: La ecuación característica es $s^2 + 4s + 4 = 0$, que posee las raíces características $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$. En este caso la solución general es

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-2t}.$$

Debido a que las raíces se repiten, el sistema está críticamente amortiguado. Las condiciones iniciales se cumplen cuando $c_1 = 1$, $c_2 = 2$. Entonces,

$$x(t) = (1 + 2t)e^{-2t}.$$

Observe que cualitativamente los gráficos para los casos sobreamortiguado y críticamente amortiguado son similares.



3.3. Caso 3: Movimiento Subamortiguado

En este caso tenemos entonces que $\beta < \omega_0$ y por lo tanto la cantidad en la raíz cuadrada en (13) es negativa, y las raíces son distintas pero complejas por lo que podemos hacer la redefinición

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2. \tag{21}$$

En este caso las raíces son

$$\lambda = -\beta \pm i\beta, \tag{22}$$

con i el número complejo $\sqrt{-1}$.

La solución para el **Oscilador subamortiguado** resulta completamente

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{-(\beta + i\omega)t} + c_2 e^{-(\beta - i\omega)t} \\ &= [(c_1 + c_2)\cos(\omega t) + i(c_1 - c_2)\sin(\omega t)]\, e^{-\beta t} \\ &= [b_1 \cos(\omega t) + b_2 \sin(\omega t)]\, e^{-\beta t}, \end{aligned} \tag{23}$$

y dado que las funciones $\cos(\omega t)$ y $\sin(\omega t)$ están relacionadas por una fase de $\pi/2$, podemos escribir la solución convenientemente como

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \delta), \tag{24}$$

la cual en el caso del sistema masa- resorte es

$$x(t) = A_0 e^{-\frac{\gamma}{2m}t} \cos\left[\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4m^2}}t + \delta\right]. \tag{25}$$

En este caso como en los anterior las constantes A_0 (amplitud inicial) y δ (la fase) pueden ser halladas a partir de las condiciones iniciales.

Analicemos esto físicamente. Cuando $\gamma = 0$ la respuesta es una sinusoidal y es consistente por su puesto con el caso idealizado. La amortiguación es producto de una fuerza de fricción, por lo que genera calor y disipa energía. Cuando la constante de amortiguamiento γ es pequeña, esperaríamos que el sistema todavía oscile, pero con una amplitud decreciente a medida que su energía se convierte en calor. Con el tiempo debería descansar en equilibrio. Esto es exactamente lo que vemos en (25). El factor $\cos(\omega t + \delta)$ muestra una oscilación. El factor exponencial $e^{-\frac{\gamma}{2m}t}$ tiene un exponente negativo y, por lo tanto, da la amplitud en descenso. Cuando $t \to \infty$, el exponencial va asintóticamente a 0, entonces $x(t)$ también va asintóticamente a su posición de equilibrio $x = 0$. Llamamos a ω la frecuencia angular (o circular) amortiguada del sistema. Esto a veces se llama pseudo-frecuencia de $x(t)$. Debemos tener cuidado de llamarlo pseudo-frecuencia porque $x(t)$ no es periódica y solo las funciones periódicas tienen una frecuencia. No obstante, $x(t)$ oscila, cruzando $x = 0$ dos veces cada pseudoperíodo.

La figura (4) muestra el comportamiento de un oscilador subamortiguado con $k = 10.5$ N/m, $m = 1.2$ kg, $A_0 = 0.5$ m, $\delta = 3$ rad. Véase como el movimiento decae suavemente para valores pequeños de γ.

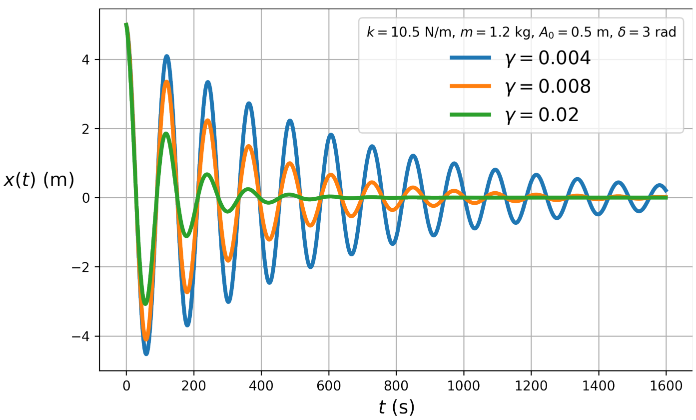


Fig. 4: Un oscilador subamortiguado con $k = 10.5$ N/m, $m = 1.2$ kg, $A_0 = 0.5$ m, $\delta = 3$ rad.

Ejemplo: Un sistema subamortiguado.

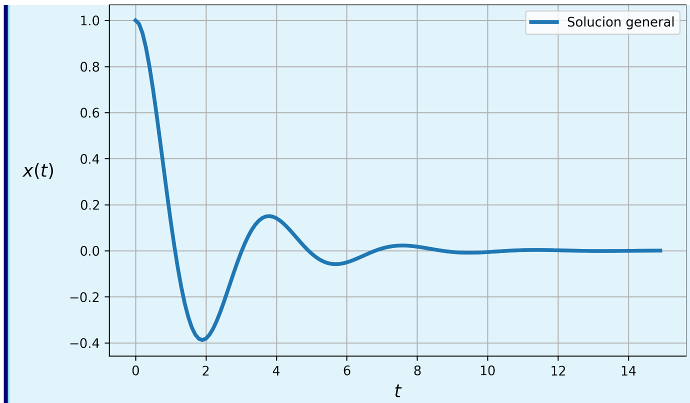
Muestre que el sistema $\ddot{x} + \dot{x} + 3x = 0$ está amortiguado, encuentre su frecuencia angular amortiguada y grafique la solución con las condiciones iniciales $x(0) = 1$, $x(0) = 0$.

Solución: La ecuación característica es $s^2 + s + 3 = 0$, que posee las raíces características $\lambda_{\pm} = (-1 \pm i\sqrt{11})/2$. En este caso la solución general es

$$\begin{aligned} x(t) &= (c_1 \cos(\sqrt{11}t/2) + c_2 \sin(\sqrt{11}t/2))e^{-t/2} \\ &= Ae^{-t/2}\cos(\sqrt{11}t/2 + \phi). \end{aligned}$$

Como las raíces tienen una parte imaginaria distinta de cero, el sistema está subamortiguado. La frecuencia angular amortiguada es $\omega = \sqrt{11}/2$. Las condiciones iniciales se cumplen cuando $c_1 = 1$ y $c_2 = 1/\sqrt{11}$. Entonces,

$$x(t) = \sqrt{\frac{12}{11}}e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{11}}{2}t + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{11}}\right)\right).$$



4. Energía

Debido a que en el ejemplo que hemos estado siguiendo las fuerzas de rozamiento y fricción no son nulas y se han considerado, la energía total del sistema no debe conservarse. De hecho, en realidad el principio de conservación de la energía mecánica total debería decirnos algo acerca de la disipación de energía al medio producto de las fuerzas de amortiguamiento debido al medio. En el capítulo anterior mostramos que si las fuerzas de fricción se suponen nulas entonces la energía total mecánica daba una simple expresión como

$$E_{total} = K + U = \frac{kA_0^2}{2}. \tag{26}$$

Supongamos que la posición de la partícula está dada por la expresión (24) y (25), entonces considerando nuevamente le energía mecánica total con $E = K + U = (mv^2 + kx^2)/2$, quedaría

$$\begin{aligned} E_{mec} = \frac{kA_0^2}{2}e^{-2\beta t} + \frac{m\beta^2 A_0^2}{2}e^{-2\beta t}\cos 2(\omega t + \phi) \\ + \frac{m\beta\omega A_0^2}{2}e^{-2\beta t}\sin 2(\omega t + \phi). \end{aligned} \tag{27}$$

Claramente cuando no hay rozamiento ($\gamma = 0 = \beta$), la energía total mecánica es justamente coincidente con el caso sin rozamiento o fricción (26), sin embargo, cuando $\gamma = 2m\beta \neq 0$, entonces además de la energía mecánica se tiene un término no nulo adicional que representa las pérdidas de energía en el medio debido a la fricción, o esquemáticamente

$$E_{mec} = K + U = \frac{kA_0^2}{2}e^{-2\beta t} = -\Delta W_f, \tag{28}$$

donde ΔW_f representa el trabajo realizado en forma de pérdida de energía en el medio,

$$\Delta W_f = \frac{m\beta A_0^2}{2}e^{-2\beta t}\left[\beta\cos 2(\omega t + \phi) + \omega\sin 2(\omega t + \phi)\right] \tag{29}$$

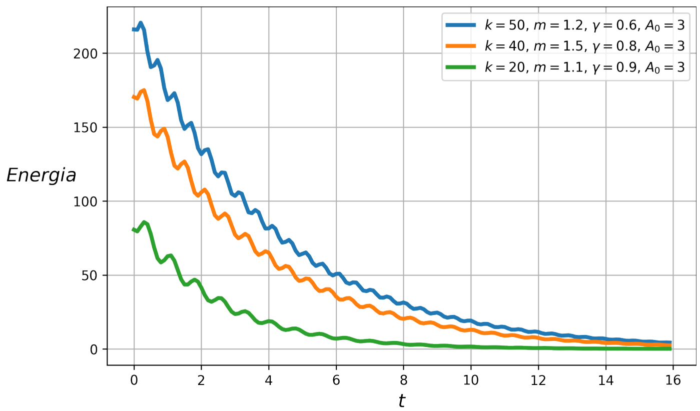


Fig. 5: Energía de un oscilador amortiguado para varios valores de k, m, A_0 y γ.

Ejemplo: Un sistema subamortiguado.

Un oscilador amortiguado está formado por una masa de 40 g y un resorte de constante elástica de 20 Nw/m. La constante de amortiguamiento debido a la viscosidad es de 0.05 kg/s. Calcular la velocidad angular, la frecuencia y la posición en un tiempo de 0.15 s, suponiendo que en $t = 0$ la posición y velocidad de la masa es de 0.3 m y 0.67 m/s, respectivamente. Calcular también el tiempo para que la amplitud se reduzca a la mitad de su valor original. Calcule por último el tiempo necesario para que la masa pierda el 60 % de su energía inicial.

Solución: Tarea.

Ejemplo: Un sistema subamortiguado.

Un oscilador amortiguado está formado por una masa de 150 g y la amplitud inicial es de 0.25 m. Si en 10 s su amplitud se reduce a 0.15 m ¿cuál debería ser la constante de amortiguamiento?.

Solución: Tarea.

5. Factor de calidad en osciladores amortiguados

Un oscilador amortiguado a menudo se describe por su factor Q que se conoce usualmente como **factor de calidad**. Suponga que partimos de la ecuación (28) y consideramos ver el cambio de energía en la oscilación debido al amortiguamiento, entonces

$$\begin{aligned} dE &= d\left[\frac{kA_0^2}{2}e^{-2\beta t}\right] = d\left[\frac{m\omega^2 A_0^2}{2}e^{-\frac{b}{m}t}\right] \\ &= d\left[E_0 e^{-t/\tau}\right] = -\frac{1}{\tau}E_0 e^{-t/\tau} = -\frac{1}{\tau}E, \end{aligned} \tag{30}$$

donde como hemos definido antes $E_0 = \frac{m\omega^2 A_0^2}{2}$ y $\tau = \frac{m}{b}$.

En este caso, tenemos que si la amortiguación es débil y la pérdida de energía por ciclo es pequeña, podemos reemplazar dE por ΔE y dt por el período T. Luego tendremos que $|\Delta E|/E$ en un ciclo (un período) está dado por

$$\left(\frac{|\Delta E|}{E}\right)_{ciclo} = \frac{T}{\tau} = \frac{2\pi}{\omega_0 \tau} = \frac{2\pi}{Q}, \tag{31}$$

donde hemos definido lo que se conoce como el factor de calidad Q, como

$$Q = \frac{2\pi}{\left(\frac{|\Delta E|}{E}\right)_{ciclo}}, \qquad \frac{|\Delta E|}{E} << 1. \tag{32}$$

Q es, por lo tanto, inversamente proporcional a la pérdida de energía fraccional por ciclo.

Ejemplo: Oscilación en circuito eléctrico.

Cuando se toca la C central en un piano (frecuencia 262 Hz), pierde la mitad de su energía después de 4 s. (a) ¿Cuál es el tiempo de decaimiento τ? (b) ¿Cuál es el factor Q para esta cuerda de piano? (c) ¿Cuál es la pérdida de energía fraccional por ciclo?

Solución: (a) Podemos usar $E = E_0 e^{-t/\tau}$ y establecer E igual $E_0/2$. En este caso tendríamos que

$$e^{-t/\tau} = \frac{1}{2} \to \tau = -\frac{4 \text{ s}}{\ln(1/2)} = 5.77 \text{ s}.$$

(b) El valor Q se puede encontrar a partir del tiempo de caída y la frecuencia. Luego $Q = \omega_0\tau = 2\pi f\tau = 9.50 \times 10^3$. Y por tanto la energía fraccional perdida por ciclo es

$$\left(\frac{|\Delta E|}{E}\right)_{ciclo} = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{f\tau} = 6.61 \times 10^{-4}.$$

6. Oscilaciones en circuitos RLC

En circuitos eléctricos pueden producirse oscilaciones eléctricas cuando en estos se tienen conectados dispositivos como resistores (R), capacitadores (C) y/o inductores (L). En relación a su topología recordemos que existen dos tipos de circuitos que pueden contener estos dispositivos: circuitos en serio o circuitos en paralelo, como pueden verse en la figura 6.

La ecuación diferencial que describe estos tipos de circuitos ha sido derivada en cursos anteriores pero uno pudiera rehacer el ejercicio aquí con fines didácticos. Véase que los voltajes V_R, V_C y V_L que pasan por la resistencia, el capacitador y el inductor, respectivamente, pueden ser calculados y definidos como

$$V_R = iR, \tag{33}$$

$$V_C = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau, \tag{34}$$

$$V_L = L\frac{di}{dt}, \tag{35}$$

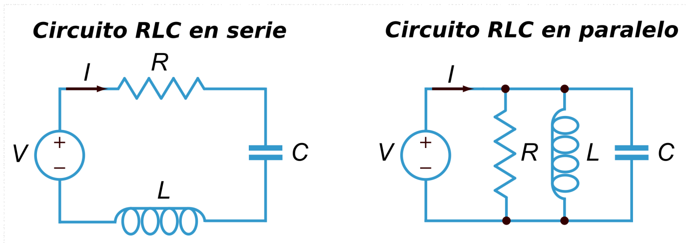


Fig. 6: Circuitos RLC en serie y en paralelo de acuerdo con su topología.

donde i es la corriente que transcurre por el circuito y por el dispositivo.

Si consideramos el circuito en serie de la figura 6 y aplicando las ley de Kirchhoff de los voltajes, tenemos que $V_R + V_L + V_C = \varepsilon(t)$, donde $\varepsilon(t)$ es la fuerza electromotriz (fem) que surte energía al circuito. Además si consideramos que la fem es más o menos constante en el tiempo, entonces podemos derivar respecto del tiempo la ecuación para la ley de Kirchhoff y obtener que

$$\frac{d^2 i(\tau)}{d\tau^2} + \frac{R}{L}\frac{di(\tau)}{\tau} + \frac{1}{LC} i(\tau) = 0. \tag{36}$$

Esta ecuación anterior es muy conocida, de hecho si hacemos los cambios de variable $2\beta = R/L$ y $\omega_0^2 = 1/(LC)$, la ecuación resultante es (10)

$$\frac{d^2 i(\tau)}{d\tau^2} + 2\beta\frac{di(\tau)}{\tau} + \omega_0^2 i(\tau) = 0. \tag{37}$$

Esta ecuación diferencial coincide con la ecuación que describe las oscilaciones amortiguadas de una masa en un resorte. Por lo tanto, las oscilaciones amortiguadas también pueden ocurrir en circuitos RLC en serie con ciertos valores de los parámetros.

Ahora consideramos el circuito RLC paralelo y derivamos una ecuación diferencial similar para él.

Por la ley actual de Kirchhoff, la corriente total es igual a la suma de las corrientes a través de una resistencia R, inductor L y condensador C, tenemos que $i_R + i_L + i_C = i(t)$, donde $i(t)$ es la corriente entregada por la fem, luego

$$i_R = \frac{V_R}{R}, \tag{38}$$

$$i_C = C\frac{dV_C}{dt}, \tag{39}$$

$$i_L = \frac{1}{L}\int_0^t V_L d\tau, \tag{40}$$

pero en este caso de que la corriente sea constante $i(t) = i_0$, tendremos que

$$C\frac{d^2 V(\tau)}{d\tau^2} + \frac{1}{R}\frac{dV(\tau)}{\tau} + \frac{1}{L}V(\tau) = 0. \tag{41}$$

Como se puede ver, nuevamente tenemos la ecuación que describe las oscilaciones amortiguadas. Por lo tanto, el modo oscilatorio también puede ocurrir en circuitos en paralelo.

6.1. Circuito resonante. Fórmula Thomson

En el caso más simple, cuando la resistencia óhmica es cero ($R = 0$) y se elimina la fuente de fem ($\varepsilon = 0$), el circuito resonante consta solo de un condensador C y un inductor L, y se describe por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \omega_0^2 i(t) = 0, \tag{42}$$

donde $\omega_0^2 = 1/(LC)$.

En este circuito habrá oscilaciones eléctricas no amortiguadas con un período

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}. \tag{43}$$

Esta fórmula se llama la fórmula de Thomson en honor del físico británico William Thomson (1824-1907), quien lo derivó teóricamente en 1853.

Ejemplo: Oscilación en circuito eléctrico.

Un circuito eléctrico consiste en una resistencia conectada en serie de $R = 100$ ohmios y una bobina con inductancia $L = 50$ H. En el momento $t = 0$ se conecta una fuente de voltaje de $V_0 = 200$ V está conectado. Encontrar: el cambio de $i_0(t)$ en el circuito, y el cambio de voltaje a través de la resistencia $V_R(t)$ y el inductor $V_L(t)$.

Solución: El circuito en serie RL se describe por la ecuación diferencial

$$L\frac{di}{dt} + iR = V_0.$$

De acuerdo con la teoría general, la solución de esta ecuación es la suma de la solución general de la ecuación homogénea i_0 y una solución particular de la ecuación no homogénea i_1, tal que $i = i_0 + i_1$. La solución general de la ecuación homogénea

$$L\frac{di}{dt} + iR = 0.$$

se expresa como

$$i_0 = Ae^{-\frac{R}{L}t},$$

dónde A es la constante de la integración.

La solución de la ecuación no homogénea i_1 corresponde al estado estable en el que la corriente en el circuito está determinada solo por la resistencia óhmica $i_1 = V_0/R$. Entonces la corriente total varía según la ley

$$i = i_0 + 1_1 = Ae^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_0}{R}.$$

La constante de integración A es determinada respecto de la condición inicial $i(t = 0) = 0$, con lo que

$$0 = A + \frac{V_0}{R} \to A = -\frac{V_0}{R}.$$

Entonces, después de que se cierra el circuito, la corriente variará de acuerdo con la ley

$$i = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = 2\left(1 - e^{-2t}\right).$$

Los voltajes V_R a través de la resistencia y V_L a través del inductor está determinado por las siguientes fórmulas:

$$V_R = iR = V_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = 200\left(1 - e^{-2t}\right),$$

$$V_L = L\frac{di}{dt} = \frac{LV_0}{R}\frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t} = 200e^{-2t}.$$

Ejemplo: Oscilación en circuito eléctrico.

Un circuito eléctrico consiste en una resistencia conectada en serie $R = 1$ ohmios, una bobina con inductancia $L = 0.25$ H y un condensador $C = 1$ μF. ¿Cuántas oscilaciones hará antes de que la amplitud de la corriente se reduzca por un factor de e?

Solución: En este circuito, las oscilaciones amortiguadas ocurrirán con una frecuencia

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

La amplitud de las oscilaciones disminuirá según la ley

$$A(t) = A_0 e^{-\frac{R}{2L}t}.$$

Suponga que N oscilaciones completas ocurrieron por tiempo t:

$$t = NT = \frac{2\pi N}{\omega} = \frac{2\pi N}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}.$$

Si la amplitud disminuye en e veces, entonces uno puede escribir la siguiente ecuación:

$$A(t) = eA_0 \to -\frac{R}{2L}t = -\frac{R}{2L}\frac{2\pi N}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} = -1.$$

Por lo tanto, encontramos el número de oscilaciones N es

$$N = \frac{L}{\pi R}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \approx \frac{1000}{2\pi} \approx 159.$$