

El péndulo simple y otros tipos de péndulos

D. Sierra-Porta

Índice

1. Resumen	1
2. El péndulo simple	1
2.1. Periodo del péndulo para oscilaciones no pequeñas	3
2.2. Velocidad del péndulo	4
3. El péndulo físico	5
4. El uso de péndulos en el mundo real	6

1. Resumen

Continuación de la física de oscilaciones. En este caso vamos a tratar uno de los sistemas físicos más difundidos para el estudio de oscilaciones. Se trata del péndulo. Muchas aplicaciones se han podido originar a partir de este sistema. Incluso antes de que los primeros científicos entendieran la gravedad del péndulo, lo pusieron a trabajar en todo tipo de campos. El movimiento fácilmente reconocible de un peso que se balancea constantemente de un pivote a veces se asocia con configuraciones místicas o poéticas, como el movimiento de un cristal para mirar hacia el futuro. Sin embargo, en realidad, los péndulos tienen varias aplicaciones prácticas en el mundo real y todavía se usan con frecuencia. Uno de los usos más comunes para los péndulos es decir la hora.



El primer reloj de péndulo se construyó en el siglo XVII y fue la forma más precisa de decir la hora durante casi 300 años. Dado que el movimiento de un péndulo es un intervalo de tiempo constante, un péndulo dentro de un reloj puede mantener las manecillas a tiempo. A menudo, como en el caso de un reloj de pie, puede ver y escuchar el péndulo en

funcionamiento mientras oscila de un lado a otro para realizar un seguimiento de cada segundo. La caída de un reloj de péndulo es que solo es preciso si permanece estacionario. Desde la década de 1930, los relojes móviles, como los relojes de cuarzo y los temporizadores digitales, se han convertido en la norma, pero aún se puede ver un péndulo en relojes antiguos y nuevos modelos de relojes de pie.

2. El péndulo simple

Un péndulo simple consiste en una esfera (o masa) de diámetro pequeño unida a una cuerda que tiene una masa muy pequeña pero es lo suficientemente fuerte como para no estirarse apreciablemente, de tal manera que el otro extremo queda sujeto a un punto fijo. De esta manera dicha esfera se desplaza desde una posición de equilibrio a través de un arco de circunferencia debido a la restricción que le produce la cuerda.

Los péndulos son de uso común. Algunos tienen usos cruciales, como en los relojes; algunos son para divertirse, como el columpio de un niño; y algunos solo están allí, como el flotador en un hilo de pescar. Para pequeños desplazamientos, un péndulo es un oscilador armónico simple. Un péndulo simple se define para tener un objeto que tiene una pequeña masa, también conocido como el péndulo, que está suspendido de un cable o cuerda ligera, como se muestra en figura 1. Al explorar el péndulo simple un poco más, podemos descubrir las condiciones bajo las cuales realiza un movimiento armónico simple, y podemos derivar una expresión interesante para su período.

Comenzamos definiendo el desplazamiento como la longitud del arco s . Definiendo un sistema coordenado que tiene un eje Y a lo largo de la cuerda en donde se encuentra la tensión y un eje X tangente a la longitud de arco, vemos que la fuerza neta sobre la esfera es tangente al arco e igual a $mg \sin \theta$. El peso mg tiene componentes $mg \cos \theta$ a lo largo de la cuerda. La tensión en la cuerda cancela exactamente el componente $mg \cos \theta$ paralela a la cuerda. Esto deja una fuerza de restauración neta hacia la posición de equilibrio en $\theta = 0$.

Ahora, si podemos demostrar que la fuerza de restauración es directamente proporcional al desplazamiento, entonces tenemos un oscilador armónico simple. De hecho podemos ver que

$$\sum F_x = -mg \sin \theta = ma_s = m \frac{d^2 s}{dt^2}, \quad (1)$$

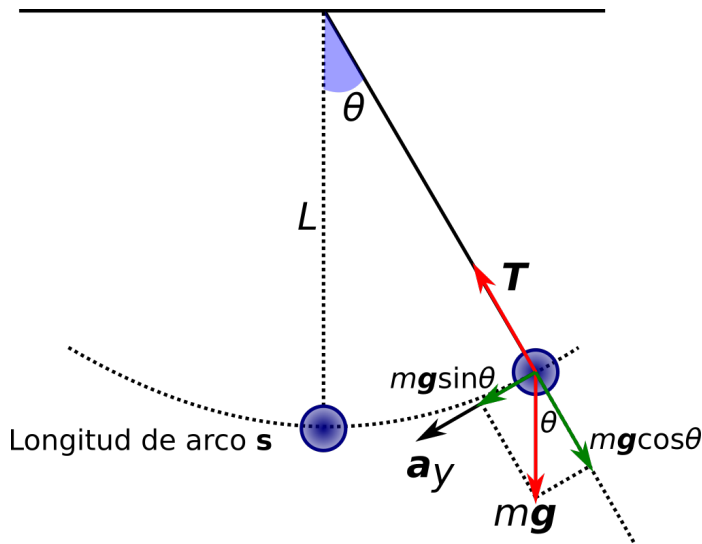


Fig. 1: El sistema cuerda-esfera que define el péndulo.

pero dado que la longitud de arco guarda relación con la longitud de la cuerda y el radio barrido ($s = L\theta$), entonces tendemos finalmente que:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin \theta. \quad (2)$$

Ahora bien, el movimiento sería un MAS si y sólo si pudiéramos reemplazar en la ecuación anterior $\sin \theta$ por θ . De hecho podemos ver las condiciones bajo las cuales esto ocurre. Observe en la tabla 1 en la cual se comparan los valores de θ y $\sin \theta$ para ángulos en el intervalo $0 < \theta \leq 40$. Véase particularmente que para $\theta < 15$ el error entre ambos es aproximadamente del 1%, con lo cual podemos decir que $\sin \theta \sim \theta$ es una muy buena aproximación.

θ (Deg)	θ_{rad}	$\sin \theta$	Error(%) $\frac{ \theta - \sin \theta }{\theta} 100\%$
1.00	0.01745	0.01745	0.00508
5.00	0.08727	0.08716	0.12704
10.00	0.17453	0.17365	0.50951
15.00	0.26180	0.25882	1.15152
20.00	0.34907	0.34202	2.06003
25.00	0.43633	0.42262	3.24502
30.00	0.52360	0.50000	4.71976
35.00	0.61087	0.57358	6.50110
40.00	0.69813	0.64279	8.61001

Tab. 1: Comparación de los valores del ángulo y seno del ángulo para intervalos en el rango $0 < \theta \leq 40$

Al tratar de determinar si tenemos un oscilador armónico simple, debemos tener en cuenta que para ángulos pequeños (menos de aproximadamente 15°), $\sin \theta$ y θ difieren en aproximadamente 1% o menos en ángulos más pequeños). Por lo tanto, para ángulos menores que aproximadamente 15° , $\sin \theta \sim \theta$. En este caso, el péndulo es exactamente un

Movimiento Armónico Simple, con

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \theta, \quad \omega^2 = \frac{g}{L}, \quad (3)$$

y por tanto su solución es

$$\theta(t) = \theta_{max} \cos(\omega t + \delta), \quad (4)$$

lo cual es conocida desde hace tiempo por ser la solución general para un oscilador armónico simple.

Usando esta ecuación, podemos encontrar el período de un péndulo para amplitudes menores que aproximadamente 15° . Para el péndulo simple:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (5)$$

Así, T es el período de un péndulo simple. Este resultado es interesante por su simplicidad. Las únicas cosas que afectan el período de un péndulo simple son su longitud y la aceleración debida a la gravedad. El período es completamente independiente de otros factores, como la masa. Al igual que con los osciladores armónicos simples, el período T para un péndulo es casi independiente de la amplitud, especialmente si θ es menor que aproximadamente 15° . Incluso los relojes de péndulo simples pueden ajustarse con precisión y exactitud.

Tenga en cuenta la dependencia de T en g . Si la longitud de un péndulo se conoce con precisión, en realidad se puede usar para medir la aceleración debido a la gravedad. Considere el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Un péndulo en Júpiter.

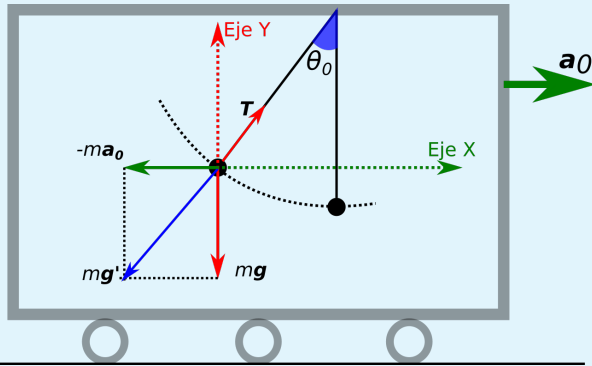
¿Cuál sería la longitud de un péndulo en la superficie de Júpiter en el cual su aceleración debida a la gravedad es de 24.79 m/s^2 si se quisiera que el periodo fuera de 1 segundo?

Solución: Podemos usar la ecuación del periodo de un péndulo tal que

$$L = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = 0.6279 \text{ m}.$$

Wao!!! Necesitaríamos sólo 63 centímetros de altura para poder colgar el péndulo y aún así su periodo de oscilación sería de 1 segundo.

Ejemplo: Un péndulo en dentro de un tren en movimiento.



Un péndulo simple de longitud 1 m está en un vagón que está acelerando horizontalmente con una aceleración $a_0 = 3m/s^2$, como se muestra en la figura. Encuentre la gravedad aparente en este sistema y el período T .

Solución: Vemos que usando los ejes coordenados podemos hacer que

$$\sum F_x = -ma_0 + T \sin \theta_0 = 0,$$

$$\sum F_y = T \cos \theta_0 - mg = 0,$$

de lo cual es fácil ver que $\tan \theta_0 = a_0/g = 0.3061$, o sea que $\theta_0 = 17.0205^\circ$.

Esto implica que la tensión puede ser calculada como $T = mg/\cos \theta_0 = 1.0248$, suponiendo que la masa pendular es de 100 g. Además en este sistema la aceleración del tren genera lo que se conoce como una fuerza ficticia lo que hace que el péndulo cambie su amplitud y está dada por la magnitud de la aceleración a_0 . De acuerdo con la figura podemos ver que

$$\mathbf{g}' = \mathbf{a}_0 + \mathbf{g} \rightarrow g' = \sqrt{a_0^2 + g^2} = 10.25 \text{ m/s}^2.$$

Finalmente, teniendo la gravedad ficticia, se puede calcular el periodo de oscilación el cual dará

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g'}} = 1.96 \text{ s.}$$

2.1. Periodo del péndulo para oscilaciones no pequeñas

Cuando la amplitud de la oscilación de un péndulo se hace grande, no podemos hacer la aproximación $\sin \theta \sim \theta$, entonces, su movimiento continúa siendo periódico, pero ya no es un armónico simple. Se debe tener en cuenta una ligera dependencia de la amplitud al determinar el período. Para una amplitud angular general θ_0 se puede demostrar que el período es calculado usando una solución en polinomios de Legendre para la integral elíptica resultante de la ecuación

general

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \sin^6\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}\right)^2 \sin^8\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \dots + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2k)}\right)^2 \sin^{2k}\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \right]$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \sum_k \left(\frac{\prod_{j=1}^k (2j-1)}{\prod_{j=1}^k (2j)} \right)^2 \sin^{2k}\left(\frac{\theta_0}{2}\right). \quad (6)$$

Otro formalismo para la solución completa de la ecuación diferencial se basa en encontrar soluciones en términos de expansiones de series de Maclaurin para el término no lineal de la ecuación diferencial:

$$\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta_0^{2k+1}}{2^{2k+1} (1+2k)!}, \quad (7)$$

así, usando esto sobre la solución antes conseguida se tiene que

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \left[1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 + \frac{11}{3072} \theta_0^4 + \frac{173}{737280} \theta_0^6 + \frac{22931}{1321205760} \theta_0^8 + \frac{1319183}{951268147200} \theta_0^{10} + \frac{233526463}{2009078326886400} \theta_0^{12} + \dots \right]. \quad (8)$$

En la figura 2 se muestra gráficamente la dependencia de la amplitud inicial del movimiento de péndulo el aumento del periodo para un péndulo simple comparando la aproximación de amplitudes pequeñas y también su solución general.

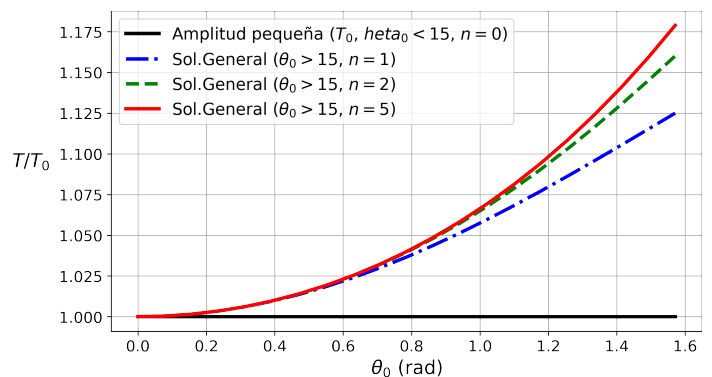


Fig. 2: Periodo para un péndulo simple calculando los primeros órdenes de aproximación de la ecuación (6).

Ejemplo: Periodo del péndulo para amplitudes grandes.

¿Cuál sería el error cometido por la estimación del periodo del péndulo a $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ordenes de aproximación de la ecuación 6?

Solución: Podemos usar la ecuación del periodo de un péndulo (6) para grandes amplitudes y tendremos que podemos comparar los valores del periodo del péndulo simple para varios valores de la amplitud angular para $0 < \theta_0 \leq 60$ en términos del periodo para pequeñas amplitudes (5).

θ_0/n	1	2	3	4	5
15°	1.674	1.737	1.7407	1.740	1.740
20°	2.924	3.116	3.132	3.133	3.134
30°	6.25	7.128	7.281	7.310	7.316
40°	10.329	12.730	13.418	13.636	13.709
50°	14.670	19.513	21.486	22.373	22.794
60°	18.75	26.660	30.780	33.145	34.582

Podemos ver como cuando $\theta_0 = 30^\circ$ incluso a primera aproximación ($n = 1$) ya el error respecto del periodo del péndulo calculado a partir de la expresión (5) ya es mayor al 6%, lo cual implica que por ejemplo el error de cálculo para un día (=1140 min) sería de 90 min, en comparación con el retraso ocasionado por un péndulo a $\theta_0 = 15^\circ$ el cual es de 24 min aproximadamente.

Ejemplo: Periodo del péndulo para amplitudes grandes.

Un reloj de péndulo simple está calibrado para mantener el tiempo exacto a una amplitud angular de $\theta_0 = 10^\circ$. Cuando la amplitud ha disminuido hasta el punto donde es muy pequeña, ¿el reloj gana o pierde tiempo? ¿Cuánto tiempo ganará o perderá el reloj en un día si la amplitud sigue siendo muy pequeña?

Solución: Para responder la primera pregunta acerca de si el período aumenta o disminuye, T disminuye a medida que θ_0 disminuye como puede verse a partir de la tabla del ejemplo anterior y también a partir de (6), por lo que el reloj gana tiempo.

Podemos usar la ecuación $\frac{|T_0 - T_{\theta_0}|}{T_{\theta_0}} 100\%$ para encontrar el factor de corrección. En este caso para $\theta_0 = 10^\circ$ y usando como aproximación a primer orden tendremos que el error da aproximadamente 0.19%, con lo cual en un día (=1440 min) el péndulo tendrá un retardo de $1440 \text{ min/día} \times 0.19 \times 10^{-2} = 2.73 \text{ min/día}$.

2.2. Velocidad del péndulo

En un análisis anterior hemos encontrado la manera de calcular la aceleración para un objeto que describe movimiento armónico simple. De hecho partiendo de la solución encontrada para el movimiento angular del péndulo simple (4), podemos tomar la primera derivada para encontrar la velocidad angular $\alpha(t)$

$$\alpha(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = -\theta_{max} \sqrt{\frac{g}{L}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t + \delta\right). \quad (9)$$

Ahora bien, podemos combinar las ecuaciones de la posición angular (4) y la recién calculada velocidad angular (9),

pero recordando que la velocidad lineal es $v(t) = \alpha r = \alpha L$, para obtener que

$$\cos^2\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t + \delta\right) = \left(\frac{\theta}{\theta_{max}}\right)^2, \quad (10)$$

$$\sin^2\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t + \delta\right) = \left(\frac{v\sqrt{\frac{L}{g}}}{L\theta_{max}}\right)^2 = \frac{1}{Lg} \left(\frac{v}{\theta_{max}}\right)^2, \quad (11)$$

y uniendo estas dos últimas expresiones tenemos que

$$Lg = \frac{1}{\theta_{max}^2} (Lg\theta^2 + v^2) \rightarrow v = \pm\sqrt{Lg(\theta_{max}^2 - \theta^2)}. \quad (12)$$

Sin embargo, esta expresión para la velocidad en cualquier valor de la amplitud angular θ en relación con la amplitud angular inicial θ_{max} , fue obtenida a partir de la aproximación para amplitudes pequeñas, por lo cual sólo será cierta en un rango específico de pequeños ángulos de amplitud.

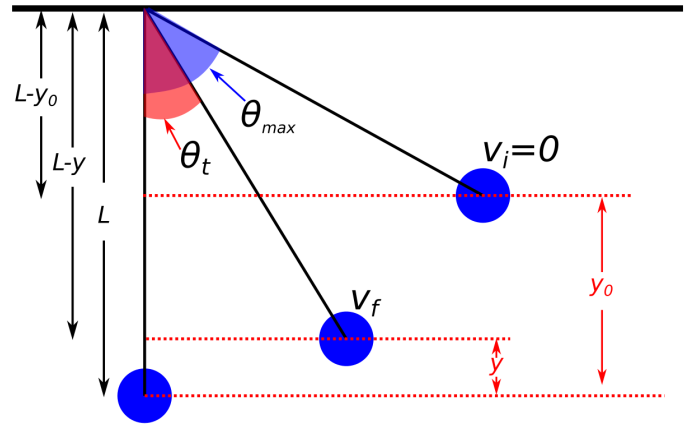


Fig. 3: Posiciones y velocidad de un péndulo para dos amplitudes distintas.

Ahora bien, una formulación general puede ser obtenida a partir de consideraciones de conservación de la energía. Como podemos ver en la figura 3, suponiendo que el péndulo se deja caer desde el reposo, se tiene que

$$E_{total} = K + U = \text{constante} = \frac{mv^2}{2} + mgh, \quad (13)$$

o equivalentemente

$$\frac{mv_f^2}{2} + mgy = mgy_0, \quad (14)$$

pero sabiendo que $y = L(1 - \cos\theta)$ y $y_0 = L(1 - \cos\theta_{max})$, entonces se demuestra que

$$v = \pm\sqrt{2gL(\cos\theta - \cos\theta_0)}. \quad (15)$$

Este resultado (15) es consistente con el resultado de la aproximación a pequeñas amplitudes (12), de hecho, para

ángulos pequeños $\cos \theta \approx \theta - \theta^2/2$, y sustituyendo los valores correspondientes de $\cos \theta$ y $\cos \theta_0$ por $\theta - \theta^2/2$ y $\theta_0 - \theta_0^2/2$, respectivamente en (15), podremos obtener el resultado en (12).

Ejemplo: Velocidad del péndulo para amplitudes franges.

Tome en cuenta el procedimiento en los ejemplos anteriores para poder calcular el error cometido en la aproximación de la velocidad para $\theta = 10^\circ$ para un péndulo de amplitud inicial de 30° .

Solución: En este caso usando las ecuaciones (12) y (15) para $\theta_{max} = 30^\circ$ y $\theta = 10^\circ$, tenemos que

$$v_{aproximada} = 0.493\sqrt{Lg}, \quad v_{full} = 0.345\sqrt{Lg},$$

$$Error(\%) = \frac{|v_{aproximada} - v_{full}|}{v_{full}} * 100\% = 42.89\%$$

3. El péndulo físico

Un objeto rígido libre de girar sobre un eje horizontal que no está a través de su centro de masa oscilará cuando se lo desplace del equilibrio. Tal sistema se llama péndulo físico.

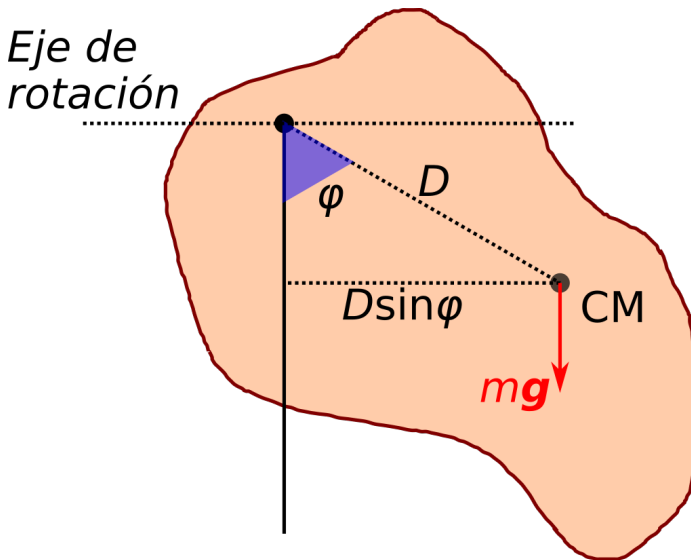


Fig. 4: Un péndulo físico.

Considere una figura plana con un eje de rotación a una distancia D del centro de masa de la figura y desplazada del equilibrio por el ángulo φ (Figura 4). Dado que la forma física rota, entonces el torque sobre el eje tiene una magnitud $MgD \sin \varphi$ y tiende a disminuir φ . La segunda ley de Newton aplicada a la rotación dará

$$\tau = I\alpha, \quad (16)$$

donde I es el momento de inercia alrededor del eje y α es la aceleración angular del centro de masa (CM). Sustituyendo

$-MgD \sin \varphi$ en la ecuación anterior para el torque total del cuerpo y además recordando que $\alpha = d^2\varphi/dt^2$, entonces tenemos que

$$-MgD \sin \varphi = I \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad (17)$$

o bien arreglando términos para que parezca una ecuación de movimiento armónico simple,

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{MgD}{I} \sin \varphi \approx -\frac{MgD}{I} \varphi = -\omega^2 \varphi, \quad (18)$$

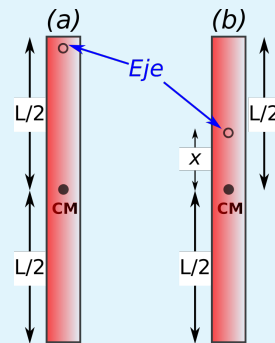
ésta última si usamos la aproximación estándar $\sin \varphi \approx \varphi$ que hemos usado ya antes.

En este caso $\omega = \sqrt{\frac{MgD}{I}}$ es la frecuencia angular, como lo hemos hecho antes y además en comparación tendremos que es posible identificar el periodo de oscilación como

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{MgD}}. \quad (19)$$

Para amplitudes grandes, el periodo está dado por la ecuación (6), con T_0 dada por la ecuación (19). Para un péndulo simple de longitud L , el momento de inercia es $I = ML^2$ y $D = L$. Entonces la ecuación (19) da lo mismo que la ecuación (5).

Ejemplo: Periodo para un péndulo físico.



Una barra uniforme de masa M y longitud L puede girar libremente sobre un eje horizontal perpendicular a la barra y a través de un extremo. (a) Encuentre el periodo de oscilación para pequeños desplazamientos angulares. (B) Encuentre el periodo de oscilación si el eje de rotación está a una distancia x del centro de masa.

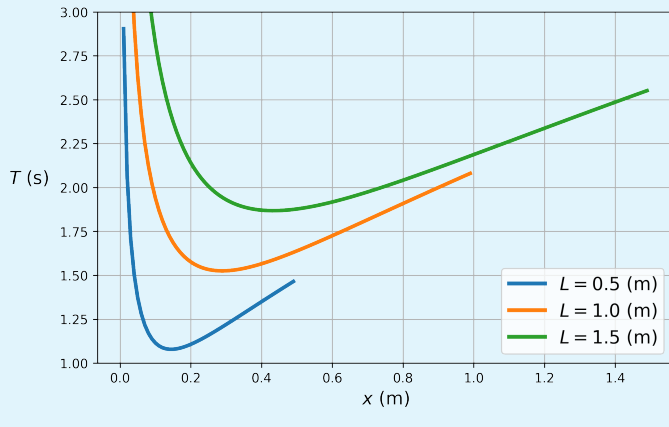
Solución: (A) El periodo viene dado por la ecuación (19). El centro de masa está en el centro de la barra, por lo que la distancia desde el centro de masa hasta el eje de rotación es la mitad de la longitud de la barra (ver igual anterior). El momento de inercia de una barra uniforme es $I = ML^2/3$ y $D = L/2$, por lo que el periodo para este caso es de

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ML^2/3}{MgL/2}} = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}}.$$

(B) Para rotaciones alrededor de un eje a través del punto P (caso (b)), el momento de inercia se puede encontrar a partir

del teorema del eje paralelo $I = I_{CM} + MD^2$, donde I_{CM} es el momento de inercia del centro de masa y coincide con $I_{CM} = ML^2/12$, y por lo tanto

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgD}} = 2\pi\sqrt{\frac{ML^2/12 + Mx^2}{Mgx}} = 2\pi\sqrt{\frac{L^2/12 + x^2}{gx}}$$



Ejemplo: Periodo mínimo del péndulo físico anterior.

En el ejemplo anterior encuentre la distancia desde el centro de masa para el cual el periodo de oscilación del péndulo físico es el mínimo.

Solución: El problema es muy simple y su solución se reduce a calcular el valor de x para cuando T es el mínimo. Una manera conveniente de hacer esto consiste en tomar la primera derivada de la función periodo $T = T(x)$ y luego de igual a cero, calcular el valor de x algebraicamente.

4. El uso de péndulos en el mundo real

Incluso antes de que los primeros científicos entendieran la gravedad del péndulo, lo pusieron a trabajar en todo tipo de campos. El movimiento fácilmente reconocible de un peso que se balancea constantemente de un pivote a veces se asocia con configuraciones místicas o poéticas, como el movimiento de un cristal para mirar hacia el futuro. Sin embargo, en realidad, los péndulos tienen varias aplicaciones prácticas en el mundo real y todavía se usan con frecuencia.

Decir la hora Uno de los usos más comunes para los péndulos es decir la hora. El primer reloj de péndulo se construyó en el siglo XVII y fue la forma más precisa de decir la hora durante casi 300 años. Dado que el movimiento de un péndulo es un intervalo de tiempo constante, un péndulo dentro de un reloj puede mantener las manecillas a tiempo. A menudo, como en el caso de un reloj de pie, puede ver y escuchar el péndulo en funcionamiento mientras oscila de un lado a otro para realizar un seguimiento de cada segundo. La caída de un reloj de péndulo es que solo es preciso si permanece estacionario. Desde la década de 1930, los relojes móviles, como

los relojes de cuarzo y los temporizadores digitales, se han convertido en la norma, pero aún se puede ver un péndulo en relojes antiguos y nuevos modelos de relojes de pie.

Sismómetros Los terremotos son notoriamente difíciles de predecir, pero los científicos desde el siglo primero hicieron todo lo posible con la ayuda de péndulos en los sismómetros. Uno de los primeros péndulos conocidos en el trabajo fue encontrado en un sismómetro de la dinastía Han. Entonces, como hoy, los sismómetros miden la actividad sísmica en el suelo. El péndulo en el sismómetro encontrado desde el primer siglo activó una serie de palancas que dirigían una pequeña bola para que se cayera de uno de los ocho agujeros del instrumento. De esa manera, los antiguos científicos esperaban saber de qué dirección venía el terremoto. Ahora, los sismómetros son un poco más avanzados. Cuando detectan movimiento, como las placas móviles de un terremoto, un péndulo con un bolígrafo sujeto representa la magnitud del movimiento. Si el péndulo se balancea vigorosamente, los científicos saben que las ondas sísmicas son intensas y potencialmente peligrosas.

Metrónomos Leer música depende en gran medida de poder tocar un cierto ritmo, pero los músicos principiantes a veces tienen problemas para mantener ese ritmo regular en sus cabezas. A menudo se los alienta a usar un metrónomo, un dispositivo que emite un clic o una luz para cada latido de un intervalo predeterminado con la ayuda de un péndulo. Algunos metrónomos también tienen un elemento visual, por lo que un músico puede mirar el péndulo del metrónomo como si estuviera mirando la varita de un conductor para mantener su ritmo constante. Si los músicos necesitan enfocarse en un nuevo intervalo, pueden ajustar la longitud de un péndulo al ritmo deseado.

Busca más información y recursos
sierraporta.github.io

