Ondas electromagnéticas

D. Sierra-Porta

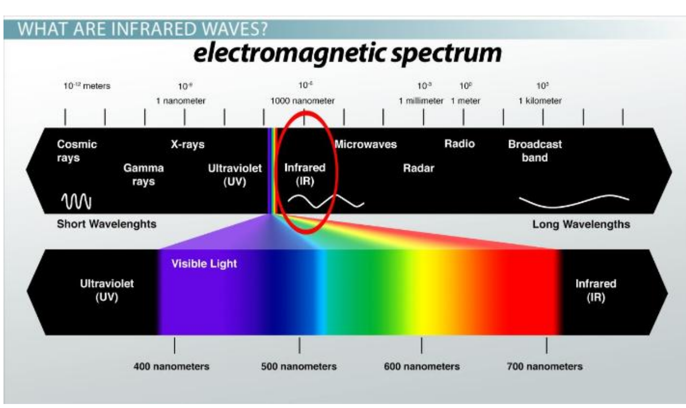
Índice

1. Resumen

Entramos en contacto con radiación electromagnética todos los días y hay ejemplos visibles en todas partes. Estas ondas que no requieren un medio de transmisión y regulan nuestra forma de vida de muchas maneras, nos ayudan a comunicarnos, cocinar e incluso resolver problemas médicos complejos.

Desde la radiación producida por su teléfono móvil hasta la derivada de los controles de rayos X y el control del aeropuerto, las ondas electromagnéticas parecen estar siempre presentes en la vida cotidiana. Es por esta razón que muchas personas temen sus consecuencias tóxicas en nuestra salud y estilo de vida.

Ejemplos de radiación electromagnética en la vida cotidiana hay muchos. Comenzando con el tipo más visible de radiación electromagnética: las ondas de luz visible. Este tipo de radiación se deriva de lo que nuestros ojos perciben como un campo de visión claro y observable. Recibimos radiación EM como información sobre varias longitudes de onda y frecuencias a través de ondas o partículas, que finalmente forman el espectro electromagnético.



Otras formas de ondas de luz visibles provienen de dispositivos de iluminación artificial y fotografía. Un excelente ejemplo de radiación de ondas de luz que puede ver es la luz de la pantalla que mira mientras lee esta información. Una de sus propiedades más importantes es el color, que también es una característica inherente del ojo humano. Los objetos no tienen color, pero la luz que reflejan pasa el filtro de conos en nuestros ojos, que son células sensibles al espectro EM y que transforman la luz blanca en color. En los humanos, las ondas de luz aseguran un funcionamiento biológico adecuado y una salud mental estable.

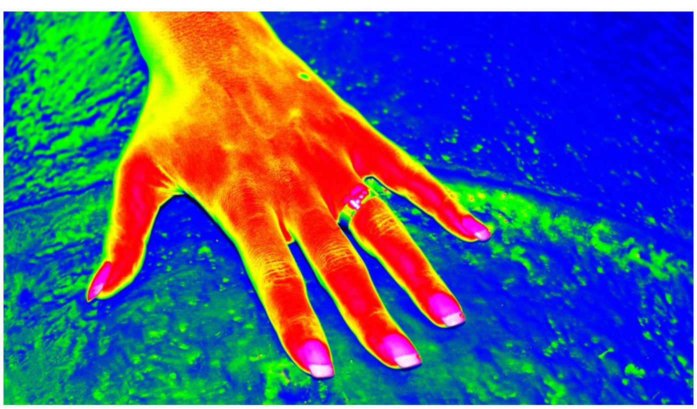
Las ondas de radio son las frecuencias básicas utilizadas en las comunicaciones. A menudo son distribuidos por un transmisor y varían en longitud de onda, que puede estar entre: 1-2 km - también conocido como ondas largas y utilizado en transmisiones de radio clásicas; 100 m - generalmente conocido como ondas medias que se utilizan para la transmisión de radio AM; 2 m - Ondas de muy alta frecuencia (VHF) generalmente utilizadas en transmisiones de radio FM; 1 m o menos: ondas de ultra alta frecuencia (UHF) utilizadas para comunicaciones de radio policiales y militares.

Otra forma de comunicación que usa ondas de radio es la transmisión del teléfono celular. Ya sea que tenga un teléfono inteligente o un modelo de teléfono móvil no intuitivo anterior, está obligado a usarlo al menos una vez al día. Estos dispositivos son productos básicos de estilo de vida que más del 60 % de la población mundial usa todos los días. De hecho, actualmente se estima que el número de usuarios de teléfonos celulares supera los 5 mil millones de usuarios a nivel mundial.

El WiFi es una de las tecnologías más utilizadas en la vida cotidiana. Ya sea que tenga un enrutador inalámbrico en casa o use uno en el trabajo, está obligado a conectarse a Internet inalámbrico de alta velocidad casi todos los días de la semana. Los enrutadores inalámbricos también están presentes en cafeterías, restaurantes y bibliotecas. Incluso los espacios públicos abiertos como parques, playas y arenas de conciertos emplean esta tecnología. Lo mismo ocurre con las ondas de radio Bluetooth que también forman un modo frecuente de comunicación y tecnología de emparejamiento de dispositivos.

Las microondas se utilizan principalmente para cocinar. Casi todos los hogares utilizan un horno de microondas para calentar o descongelar alimentos, y este dispositivo se ha convertido en un aparato de cocina común en todo el mundo desde la década de 1970. Cuando calienta su comida en un horno de microondas, las moléculas de agua absorben la radiación de microondas y generan un aumento térmico que también mata las bacterias presentes. Dado que la única forma de energía transmitida a los alimentos es el calor, existe un riesgo mínimo de contaminación o radiación que puede afectar su salud.

Las ondas infrarrojas se establecen en algún lugar entre las ondas de luz visible y las microondas. Algunos de ellos son ligeramente visibles en la vida cotidiana, como el que emite desde el control remoto de su televisor o el detector de humo, que son prácticamente inofensivos. Este tipo de radiación se llama “ondas infrarrojas cercanas”. Sus contrapartes, las “ondas infrarrojas lejanas” son generalmente invisibles para el ojo humano, y emiten más calor. La radiación infrarroja solo es perjudicial para el cuerpo humano cuando excede las longitudes de onda superiores a 750 nm.



Los capítulos anteriores han demostrado que la velocidad de las ondas a través de un medio está determinada por la inercia y la elasticidad del medio. Estas dos propiedades son capaces de almacenar energía de las ondas en el medio, y en ausencia de disipación de energía también determinan la impedancia presentada por el medio a las ondas. Además, cuando no hay un mecanismo de pérdida, siempre se obtendrá una ecuación de onda pura con una solución seno o coseno, pero esta ecuación se modificará por cualquier término resistivo o de pérdida para dar una solución oscilatoria que decaiga con el tiempo o la distancia.

Estos procesos físicos describen exactamente la propagación de ondas electromagnéticas a través de un medio. La inercia magnética del medio, como en el caso de la línea de transmisión, es proporcionada por la propiedad inductiva del medio, es decir, la permeabilidad μ, que tiene las unidades de henries por metro. La elasticidad o propiedad capacitiva del medio es proporcionada por la permitividad ϵ, con unidades de faradios por metro. El almacenamiento de energía magnética surge a través de la permeabilidad μ; la energía potencial o del campo eléctrico se almacena a través de la permitividad ϵ.

Si el material se define como dieléctrico, solo μ y ϵ son efectivos y resultará en una ecuación de onda pura tanto para el vector de campo magnético H como para el vector de campo eléctrico E. Si el medio es un conductor, tiene conductividad σ (el inverso de resistividad) con dimensiones de siemens por metro o (ohmios m)$^{-1}$, además de μ y ϵ, entonces parte de la energía de las ondas se disipará y tendrá lugar la absorción.

En este capítulo consideraremos primero la propagación de ondas electromagnéticas en un medio caracterizado por μ y ϵ solo, y luego trataremos el caso general de un medio que tiene propiedades μ, ϵ y σ.

2. Ecuaciones de Maxwell

Las ondas electromagnéticas surgen cada vez que una carga eléctrica cambia su velocidad. Los electrones que se mueven desde un nivel de energía superior a uno inferior en un átomo irradiarán una onda de una frecuencia y longitud de onda particulares. Un gas ionizado muy caliente que consiste en partículas cargadas irradiará ondas sobre un espectro continuo a medida que las trayectorias de las partículas individuales se curvan en colisiones mutuas. Esta radiación se llama “Bremsstrahlung”. La radiación de las ondas electromagnéticas de una antena se debe al movimiento oscilatorio de las cargas en una corriente alterna que fluye en la antena. La figura 1 muestra el espectro de frecuencia de las ondas electromagnéticas. Todas estas ondas exhiben las mismas características físicas.

Es bastante notable que toda la teoría electromagnética pueda describirse por las cuatro relaciones vectoriales en las ecuaciones de Maxwell. Al examinar estas relaciones en detalle, veremos que dos están en estado estacionario; es decir, independiente del tiempo, y que dos varían en el tiempo. Las dos ecuaciones que varían en el tiempo son matemáticamente suficientes para producir ecuaciones de onda separadas para los vectores de campo eléctrico y magnético, E y H, pero las ecuaciones de estado estacionario ayudan a identificar la naturaleza de onda como transversal.

La primera ecuación variable en el tiempo relaciona la variación en el tiempo de la inducción magnética, $\mu H = B$, con la variación en el espacio de E; es decir

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mu H) \ \text{ conectado a la variación } \ \frac{\partial E}{\partial z}. \tag{1}$$

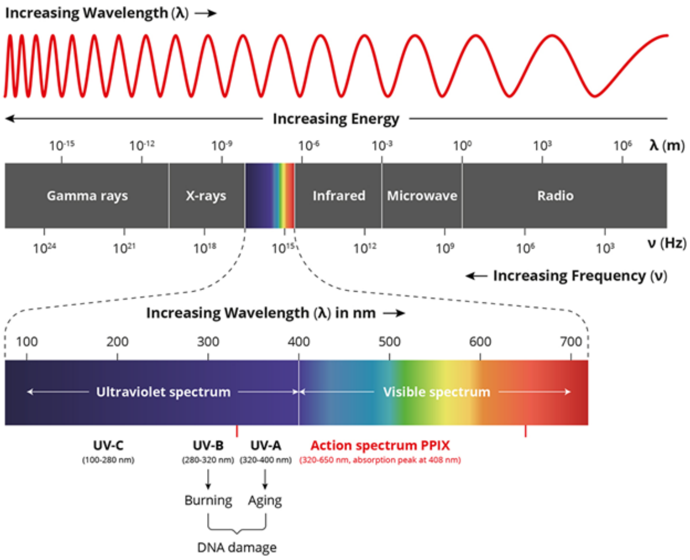


Fig. 1: Longitudes de onda y frecuencias en el espectro electromagnético.

Esto no es más que una forma de la Ley de Lenz o Faraday, como veremos.

La segunda ecuación variable en el tiempo establece que la variación en el tiempo de E define la variación en el espacio de H, es decir

$$\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon E) \text{ conectado a la variación } \frac{\partial H}{\partial z}. \tag{2}$$

Nuevamente veremos que esto es realmente una declaración de la Ley de Ampere.

Estas ecuaciones muestran que las variaciones de E en el tiempo y el espacio afectan a las de H y viceversa. E y H no pueden considerarse cantidades aisladas, pero son interdependientes.

El producto E tiene dimensiones

$$\frac{\text{faradios}}{\text{metros}} \times \frac{\text{voltios}}{\text{metros}} = \frac{\text{carga}}{\text{área}}.$$

Esta carga por unidad de área se llama carga de desplazamiento $D = \epsilon E$.

Físicamente aparece en un dieléctrico cuando un campo eléctrico aplicado polariza los átomos o moléculas constituyentes y la carga se mueve a través de cualquier plano en el dieléctrico que es normal a la dirección del campo aplicado. Si el campo aplicado varía o alterna con el tiempo, vemos que las dimensiones de

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon E) = \frac{\text{carga}}{\text{tiempo} \times \text{área}},$$

lo cual es corriente por unidad de área.

Esta corriente se llama corriente de desplazamiento. Es relativamente simple visualizar esta corriente en un dieléctrico donde las cargas físicas pueden moverse; no es fácil asociar una corriente de desplazamiento con espacio libre en ausencia de un material, pero siempre se puede expresar como $i_d = \epsilon(\partial \Phi_E/\partial t)$, donde Φ_E es el flujo del campo eléctrico a través de una superficie.

Considere lo que sucede en el circuito eléctrico que contiene un resistor, un capacitador, una batería y un interruptor. Cuando el interruptor está cerrado y la batería comienza a cargar el condensador C a un potencial V. Una corriente i que obedece la Ley de Ohm ($V = iR$) fluirá a través de los cables de conexión mientras mientras el condensador se está cargando y una aguja de la brújula u otro detector de campo magnético colocado cerca de los cables mostrará la presencia del campo magnético asociado con esa corriente. Pero supongamos que se coloca un detector de campo magnético (protegido de todos los efectos externos) en la región entre las placas del condensador donde no fluye corriente óhmica o de conducción. ¿Detectaría un campo magnético?

La respuesta es sí. Todos los efectos del campo magnético de una corriente existen en esta región mientras el condensador se esté cargando, es decir, mientras la diferencia de potencial y el campo eléctrico entre las placas del condensador estén cambiando. Fue la mayor contribución de Maxwell a la teoría electromagnética afirmar que la existencia de un campo eléctrico que cambia el tiempo en el espacio libre da lugar a una corriente de desplazamiento. El mismo resultado se sigue al considerar la conservación de la carga. El flujo de carga en cualquier volumen pequeño en el espacio debe ser igual al flujo que sale. Si el volumen incluye la placa superior del condensador, la corriente óhmica a través de los cables produce el flujo hacia el volumen, mientras que la corriente de desplazamiento representa el flujo de salida.

En el futuro, por lo tanto, se deberán considerar dos tipos diferentes de corriente:

1. La corriente de conducción usual que obedece la Ley de Ohm ($V = iR$) y
2. La corriente de desplazamiento de densidad $\partial D/\partial t$.

En un medio de permeabilidad μ y permitividad ϵ, pero donde la conductividad sea $\sigma = 0$, la corriente de desplazamiento será la única corriente que fluye. En este caso, seguirá una ecuación de onda pura para E y H y no habrá pérdida de energía o atenuación.

Cuando $\sigma \neq 0$ un elemento resistivo permite que fluya la corriente de conducción, seguirá la pérdida de energía, se agregará un término de difusión a la ecuación de onda y la amplitud de onda se atenuará exponencialmente con la distancia. Veremos que la magnitud relativa de estas dos corrientes depende de la frecuencia y que su relación determina si el medio se comporta como conductor o como dieléctrico.

3. Ondas electromagnéticas en un medio que tiene permeabilidad finita μ y permisividad ϵ pero con conductividad $\sigma = 0$

Consideraremos un sistema de ondas planas y elegiremos el plano XY como esa región sobre la cual las propiedades de onda son constantes. Estas propiedades no variarán con respecto a X e Y y todas las derivadas $\partial/\partial x$ y $\partial/\partial y$ serán cero.

La primera ecuación de Maxwell variable en el tiempo se escribe en notación vectorial como

$$\mathbf{Rot}(E) = \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} = -\mu\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{3}$$

Esto obviamente se descompone en tres ecuaciones ya que la anterior es una ecuación vectorial

$$\begin{cases} -\mu\frac{\partial}{\partial t}H_x = \frac{\partial}{\partial y}E_z - \frac{\partial}{\partial z}E_y \\ -\mu\frac{\partial}{\partial t}H_y = \frac{\partial}{\partial z}E_x - \frac{\partial}{\partial x}E_z \\ -\mu\frac{\partial}{\partial t}H_z = \frac{\partial}{\partial x}E_y - \frac{\partial}{\partial y}E_x \end{cases}, \tag{4}$$

donde los subíndices representan las direcciones de las componentes. E_x, E_y y E_z son, respectivamente, las magnitudes del campo eléctrico E. Del mismo modo, H_x, H_y y H_z son las magnitudes de H. Las dimensiones de estas ecuaciones pueden escribirse

$$-\frac{\mu H}{\text{tiempo}} = \frac{E}{\text{longitud}},$$

lo cual multiplicando a cada lado por unidades de longitud al cuadrado queda

$$-\frac{\mu H}{\text{tiempo}} \times \text{área} = E \times \text{longitud},$$

o bien

$$-\frac{\text{Flujo magnético total}}{\text{tiempo}} = \text{voltios}.$$

Esto es dimensionalmente de la forma de la Ley de Lenz o Faraday.

La segunda ecuación de Maxwell variable en el tiempo se escribe en notación vectorial como

$$\mathbf{Rot}(H) = \nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t} = \epsilon\frac{\partial E}{\partial t}. \tag{5}$$

La cual en componentes es

$$\begin{cases} -\epsilon\frac{\partial}{\partial t}E_x = \frac{\partial}{\partial y}H_z - \frac{\partial}{\partial z}H_y \\ -\epsilon\frac{\partial}{\partial t}E_y = \frac{\partial}{\partial z}H_x - \frac{\partial}{\partial x}H_z \\ -\epsilon\frac{\partial}{\partial t}E_z = \frac{\partial}{\partial x}H_y - \frac{\partial}{\partial y}H_x \end{cases}. \tag{6}$$

Las dimensiones de estas ecuaciones pueden escribirse

$$-\frac{\text{corriente}}{\text{área}} = \frac{H}{\text{longitud}},$$

lo cual multiplicando a cada lado por unidades de longitud queda

$$-\frac{\text{corriente}}{\text{longitud}} = H,$$

que es dimensionalmente de la forma de la Ley de Amperes (es decir, el campo magnético circular en el radio r debido a la corriente i que fluye en un cable recto viene dado por $H = i/2\pi r$).

La primera ecuación de estado estacionaria de Maxwell puede escribirse

$$\mathbf{Div}(D) = \nabla \cdot D = \epsilon\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) = \rho, \tag{7}$$

donde ϵ es constante y ρ es la densidad de carga. Esto indica que sobre un elemento de volumen pequeño $dxdydz$ de densidad de carga ρ, el cambio de desplazamiento depende del valor de ρ.

Cuando $\rho = 0$ la ecuación se convierte en

$$\epsilon\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) = 0, \tag{8}$$

de modo que si el desplazamiento $D\epsilon E$ está representado gráficamente por líneas de flujo que deben comenzar y terminar con cargas eléctricas, el número de líneas de flujo que ingresan al elemento de volumen $dxdydz$ debe ser igual al número que lo deja.

La segunda ecuación de estado estacionario está escrita

$$\mathbf{Div}(B) = \nabla \cdot B = \mu\left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z}\right) = 0. \tag{9}$$

Una vez más, esto indica que un número igual de líneas de inducción magnética entran y salen del volumen $dxdydz$. Esta es una consecuencia física de la inexistencia de polos magnéticos aislados, es decir, un solo polo norte o sur.

Mientras que la densidad de carga en la primera ecuación estacionaria puede ser positiva, es decir, una fuente de líneas de flujo (o desplazamiento), o negativa, es decir, un sumidero de líneas de flujo (o desplazamiento), no puede existir una fuente separada o sumidero de inducción magnética aisladamente, cada fuente se corresponde con un sumidero de igual fuerza.

4. La ecuación de onda para ondas electromagnéticas

Dado que, con estas ondas planas, sin perder generalidad y, suponiendo por simplicidad que tanto el campo magnético como el campo eléctrico se propagan sólo en una dimensión (digamos z), todas las derivadas con respecto a x e y son cero. Entonces las ecuaciones (4) y (9) dan

$$-\mu\frac{\partial H_z}{\partial t} = 0, \quad \text{y,} \quad \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \tag{10}$$

por lo tanto, H_z es constante en el espacio y en el tiempo y debido a que estamos considerando solo la naturaleza oscilatoria de H, un H_z constante no puede tener efecto en el movimiento de la onda. Por lo tanto, podemos poner $H_z = 0$. Una consideración similar de las ecuaciones (6) y (7) conduce al resultado de que $E_z = 0$.

La ausencia de variación en H_z y E_z significa que las oscilaciones o variaciones en H y E ocurren en direcciones perpendiculares a la dirección Z. Veremos que esto lleva a la conclusión de que las ondas electromagnéticas son ondas transversales.

Además de tener ondas planas, simplificaremos nuestra imagen considerando solo las ondas polarizadas en el plano. Podemos elegir que la vibración del campo eléctrico esté en la dirección X o Y. Consideremos solo E_x, con $E_y = 0$. En este caso, las ecuaciones (4) dan

$$-\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial z}, \tag{11}$$

y la ecuación (6), dará

$$\epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{\partial H_y}{\partial z}. \tag{12}$$

Usando el hecho de que las derivadas son operadores conmutativos y tomando $\partial/\partial t$ de la ecuación (11) y $\partial/\partial z$ de la ecuación (12), entonces tenemos que

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} H_y = \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} H_y, \tag{13}$$

o sea una ecuación para H_y, mientras que una ecuación análoga para E_x se pude obtener tomando $\partial/\partial z$ de la ecuación (11) y $\partial/\partial t$ de la ecuación (12),

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x = \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x. \tag{14}$$

Es decir, podemos ver que tanto E_x como H_y obedecen la misma ecuación diferencial, propagando en la dirección Z con una velocidad de $v^2 = (\mu\epsilon)^{-1}$. En espacio libre, la velocidad es la velocidad de la luz, esto es $c = (\mu_0\epsilon_0)^{-1/2}$, donde μ_0 es la permeabilidad del espacio libre, mientras que ϵ_0 es la permitividad del espacio libre.

Las soluciones de estas ecuaciones pueden ser escritas rápidamente, ya que lo hemos hecho en capítulos anteriores, y tienen la forma

$$E_x = E_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - z), \tag{15}$$

$$H_y = H_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - z), \tag{16}$$

donde E_0 y H_0 son los valores de las amplitudes máximas de E y H. Tenga en cuenta que las soluciones de seno (o coseno) significa que no se produce atenuación: solo están involucradas las corrientes de desplazamiento y no hay corrientes conductoras u óhmicas.

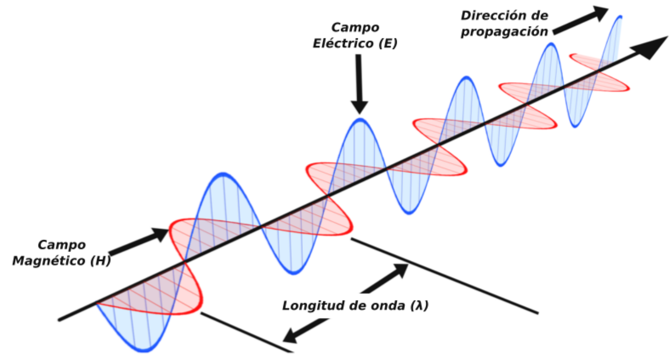


Fig. 2: En una onda electromagnética polarizada en plano, el vector de campo eléctrico E_x y el vector de campo magnético H_y son perpendiculares entre sí y varían sinusoidalmente. En un medio no conductor están en fase. El producto vectorial, $E \times H$, da la dirección del flujo de energía.

Podemos representar la onda electromagnética (E_x, H_y) que viaja en la dirección Z en la Figura 2, y recordar que debido a que E_z y H_z son constantes (o cero), la onda electromagnética es una onda transversal.

La dirección de propagación de las ondas siempre estará en la dirección $E \times H$, en este caso, $E \times H$ tiene magnitud, $E_x H_y$ y está en la dirección Z. Este producto tiene las dimensiones

$$\frac{\text{voltaje} \times \text{corriente}}{\text{longitud} \times \text{longitud}} = \frac{\text{potencia eléctrica}}{\text{área}},$$

medida en unidades de vatios por metro cuadrado.

El producto vectorial, $E \times H$ da la dirección del flujo de energía. El flujo de energía por segundo a través del área unitaria viene dado por el vector de Poynting:

$$\frac{1}{2} E \times H^*. \tag{17}$$

5. Ilustración del vector de Poynting

Podemos ilustrar el flujo de energía electromagnética en términos del vector de Poynting considerando el circuito simple de la Figura 3, donde el condensador de placa paralela del área A y la separación d, que contiene un dieléctrico de permitividad ϵ, se está cargando a un voltaje V.

A lo largo del proceso de carga, la corriente fluye y los vectores de campo eléctrico y magnético muestran que el vector de Poynting siempre se dirige al volumen Ad ocupado por el dieléctrico.

La capacitancia C del condensador es $\epsilon A/d$ y la energía total del condensador a potencial V es de $CV^2/2$ julios, que se almacena como energía electrostática. Pero $V = Ed$, donde E es el valor final del campo eléctrico, de modo que la energía total

$$\frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon A}{d}\right) E^2 d^2 = \frac{1}{2}\left(\epsilon E^2\right) Ad, \tag{18}$$

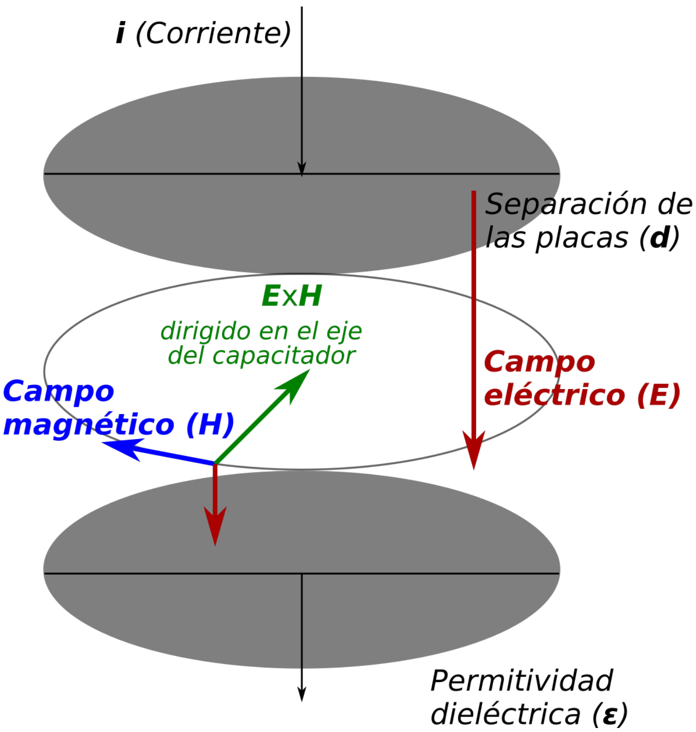


Fig. 3: Durante la carga, el vector $E \times H$ se dirige al volumen del condensador. Al final de la carga, la energía es totalmente electrostática e igual al producto del volumen del condensador, Ad, y la energía electrostática por unidad de volumen, $\epsilon E^2/2$.

donde Ad es el volumen del capacitador.

La energía electrostática por unidad de volumen almacenada en el condensador es, por lo tanto, de $\epsilon E^2/2$ y resulta del flujo de energía electromagnética durante la carga.

Si suponemos soluciones para los campo eléctrico y magnético (15) y (16), entonces además usando la ecuación (11), entonces tenemos que $-\mu v H_y = -E_x$, y dado que $v^2 = (\mu\epsilon)^{-1}$ entonces

$$\frac{H_y}{E_x} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} = \frac{H_0}{E_0}, \tag{19}$$

la cual tiene dimensiones de ohmios. El valor de $\sqrt{\mu/\epsilon}$ representa la impedancia característica de el medio para ondas electromagnéticas. En el espacio libre este tiene un valor de $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 376.7\ \Omega$, para que el espacio libre presente una impedancia de 376.7 Ohmios a las ondas electromagnéticas que lo atraviesan.

Por lo tanto, para un dieléctrico, la energía electrostática $\epsilon E_x^2/2$ por unidad de volumen en una onda electromagnética es igual a la energía magnética por unidad de volumen $\mu H_y^2/2$ y la energía total es la suma $(\epsilon E_x^2 + \mu H_y^2)/2$.

Esto proporciona el valor instantáneo de la energía por unidad de volumen y sabemos que, en la onda, el valor promedio de la energía por unidad de volumen es

$$\frac{1}{2}\epsilon\bar{E}_x^2 + \frac{1}{2}\mu\bar{H}_y^2 = \frac{1}{4}\epsilon E_0^2 + \frac{1}{4}\mu H_0^2 = \frac{1}{2}\epsilon E_0^2, \tag{20}$$

en unidades de Julios m^{-2}.

6. ¿Que pasa si $\sigma \neq 0$

Desde un punto de vista físico, el vector campo eléctrico en ondas electromagnéticas juega un papel mucho más significativo que el vector campo magnético. La mayoría de los efectos ópticos están asociados con el vector eléctrico. Por lo tanto, concentraremos nuestra discusión en el comportamiento del campo eléctrico. En un medio de conductividad $\sigma = 0$ hemos obtenido la ecuación de onda (14).

Cuando $\sigma \neq 0$ también debemos considerar las corrientes de conducción que fluyen. Estas corrientes están dadas por la Ley de Ohm como $i = V/R$, y definimos la densidad de corriente; es decir, la corriente por unidad de área, como

$$J = \frac{i}{\text{área}} = \frac{1}{R \times \text{longitud}} \times \frac{V}{\text{longitud}} = \sigma E, \tag{21}$$

donde σ es la conductividad y E es el campo eléctrico. $J = \sigma E$ es otra forma de la Ley de Ohm. Con las corrientes de desplazamiento y conducción fluyendo, la segunda ecuación variable de Maxwell lee, en forma vectorial,

$$\nabla \times H = \frac{\partial}{\partial t} D + J, \tag{22}$$

cada término en el lado derecho tiene dimensiones de corriente por unidad de área. La presencia de la corriente de conducción modifica la ecuación de onda al agregar un segundo término de la misma forma a su lado derecho

Por lo tanto, haciendo ahora el mismo ejercicio que con las ecuaciones anteriores para $\sigma = 0$, la ecuación final viene dada por

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x = \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x + \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} E_x. \tag{23}$$

El producto $(\mu\sigma)^{-1}$ se llama difusividad magnética y tiene las dimensiones $\mathrm{L}^2\ \mathrm{T}^{-1}$, como esperamos de todos los coeficientes de difusión.

La solución de esta ecuación diferencial es muy sencilla si hacemos una suposición de que la solución puede escribirse en términos de una separación de variables espaciales y temporales, pero suponiendo que la dependencia temporal es armónica simple, es decir,

$$E_x(z,t) = E_0 e^{i\omega t} e^{-\gamma z}. \tag{24}$$

Por tanto introduciendo en la ecuación diferencial tenemos que la solución es explícitamente que $\gamma = i\omega\mu\sigma + \omega^2\mu\epsilon$. En este caso, debemos decir que en realidad también es admitida una solución con $e^{\gamma z}$, pero en este caso sólo se ha tomado la solución negativa para suponer que la onda se mueve en la dirección Z positiva.

Para asignar un valor adecuado, debemos volver a la ecuación original y considerar las magnitudes relativas de los dos términos del lado derecho. Si el medio es dieléctrico, solo fluirán corrientes de desplazamiento. Cuando el medio es un conductor, las corrientes óhmicas del segundo término en el lado derecho serán dominantes. La razón de las magnitudes de la densidad de corriente de conducción y la densidad de corriente de desplazamiento es la razón de los dos términos del lado derecho. Esta relación es

$$\frac{J}{\partial D/\partial t} = \frac{\sigma E_x}{\partial(\epsilon E_x)/\partial t} = \frac{\sigma}{i\omega\epsilon}. \tag{25}$$

Vemos inmediatamente por la presencia de i que la fase de la corriente de desplazamiento es 90° de la de la corriente óhmica o de conducción. También está 90° desfazada del campo eléctrico E_x, por lo que la corriente de desplazamiento no disipa potencia.

Para un conductor, donde $J >> \partial D/\partial t$, tenemos que $\sigma >> \omega\epsilon$ con lo cual $\gamma = i\sigma\omega\mu$.

La solución completa explícitamente luce como

$$E_x = E_0 e^{-\sqrt{\omega\mu\sigma/2}} e^{i\left(\omega t - \sqrt{\omega\mu\sigma/2}\right)z}, \tag{26}$$

una inda progresiva en la dirección Z positiva con una amplitud decayendo con el factor $e^{-\sqrt{\omega\mu\sigma/2}z}$. Note que el producto $\omega\mu\sigma$ tiene dimensiones de (longitud)$^{-2}$.

7. Skin Depth

A partir de la solución (26) podemos ver que después de viajar una distancia

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}, \tag{27}$$

en el conductor, el vector de campo eléctrico ha decaído a un valor $E_x = E_0 e^{-1}$. Esta distancia se denomina Skin Depth, es decir, aproximadamente el 37 % de su amplitud inicial (Figura 4) (sin traducción al español).

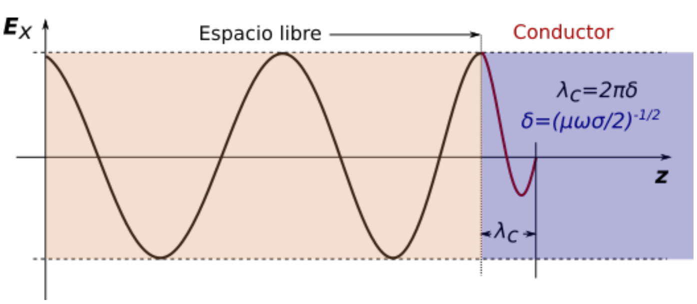


Fig. 4: Las ondas electromagnéticas en un dieléctrico golpean la superficie plana de un conductor, y el vector de campo eléctrico E_0 se amortigua a un valor $E_0 e^{-1}$ a una distancia de $(2/\omega\mu\sigma)^{1/2}$, conocido como *skin depth*. Esto explica las propiedades de blindaje eléctrico de un conductor. λ_c es la longitud de onda en el conductor.

Para cobre, por ejemplo, con $\mu \approx \mu_0$ y $\sigma = 5.8 \times 10^7$ S s^{-1} a una frecuencia de 60 Hz, $\delta = 9$ mm, a 1 MHz, $\delta \approx 6.6 \times 10^{-5}$ m y a 30000 MHz (longitud de onda de radar de 1 cm), $\delta \approx 3.8 \times 10^{-7}$ m.

Por lo tanto, las ondas electromagnéticas de alta frecuencia se propagan solo a una distancia muy pequeña en un conductor. El campo eléctrico está limitado a una región muy pequeña en la superficie, solo fluirán corrientes significativas en la superficie y, por lo tanto, la resistencia del conductor aumenta con la frecuencia. También vemos por qué un conductor puede actuar para "proteger" una región de las ondas electromagnéticas.

8. Velocidad de onda electromagnética en un conductor y dispersión anómala

La velocidad de fase de la onda v viene dada por

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega\mu\sigma/2}} = \omega\sigma = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} = f\lambda_c. \tag{28}$$

Cuando δ es pequeño, entonces v es pequeño, y por tanto el índice de refracción c/v de un conductor puede ser muy grande. La velocidad $v = \omega\delta = 2\pi f\delta$, de modo que λ_c en el conductor es $2\pi\delta$ puede ser muy pequeña.

Como v es una función de la frecuencia, un conductor eléctrico es un medio dispersivo para las ondas electromagnéticas. Además, como nos muestra la tabla a continuación, $\partial v/\partial\lambda$ es negativo, por lo que el conductor se dispersa de manera anómala y la velocidad del grupo es mayor que la velocidad de la onda. Dado que $c^2/v^2 = \mu\epsilon/\mu_0\epsilon_0 = \mu_r\epsilon_r$, donde el subíndice r define valores relativos no dimensionales, es decir, $\mu/\mu_0 = \mu_r$ y $\epsilon/\epsilon_o = \epsilon_r$, luego para $\mu_r \approx 1$, $\epsilon_r v^2/c^2$, y también

$$\frac{\partial\epsilon_r}{\partial\lambda} = -\frac{2}{v}\epsilon_r\frac{\partial v}{\partial\lambda}, \tag{29}$$

lo que confirma que $\partial\epsilon_r/\partial\lambda$ es positivo, y un medio anormalmente dispersivo. También vemos que podemos definir $c^2/v^2 = \epsilon_r = n^2$, donde n es el índice de refracción. Este valor relativo de la permitividad es, por supuesto, conocido familiarmente como la constante dieléctrica cuando la frecuencia es baja. Esta identidad se pierde a frecuencias más altas porque la permitividad depende de la frecuencia.

Tenga en cuenta que $\lambda_c = 2\pi\delta$ es muy pequeño y que cuando una onda electromagnética golpea una superficie conductora, el vector del campo eléctrico caerá a aproximadamente el 1 % de su valor de superficie en una distancia igual a $3\lambda_c/4 = 4.6\delta$. Efectivamente, por lo tanto, la onda electromagnética viaja menos de una longitud de onda en el conductor.

Frecuencia	60	10^6	3×10^{10}
λ_{libre} (m)	$5{\times}10^6$	300	10^{-2}
δ (m)	9×10^{-3}	6.6×10^{-5}	3.9×10^{-7}
$v_{cond} = \omega\delta$ (m/s)	3.2	4.1×10^2	7.1×10^4
$n = c/v$	9.5×10^7	7.3×10^5	4.2×10^3