Ondas transversales

D. Sierra-Porta

Índice

1. Resumen

Las ondas transversales son ondas en las que hay un cambio de posición de las partículas (o perturbación) que es perpendicular a la dirección de propagación en la que se mueve la onda.

Si arrojas una piedra en un charco de agua, suceden dos cosas: el agua se mueve hacia arriba y hacia abajo, mientras que el efecto (la ondulación) se mueve hacia afuera alejándese del centro en donde se produjo inicialmente la perturbación. Otros ejemplos son cuerdas o pieles de tambor. El ejemplo más importante es cualquier forma de radiación electromagnética, donde los campos eléctrico y magnético se intercambian perpendicularmente a la dirección de propagación.

Frente a las ondas transversales están las ondas longitudinales. Estos muestran solo cambios en la dirección de viaje. El ejemplo más obvio son las ondas sonoras, donde las diferencias de presión se transmiten de una parte del medio (por ejemplo, aire) a la siguiente. En una cuerda o piel de tambor, las ondas transversales se traducen a ondas longitinales en el aire, que luego se traducen a ondas estacionarias transversales en nuestros tímpanos. A través de un sistema de huesos pequeños, estos se traducen nuevamente en ondas longitutinales en el líquido de nuestro oído interno, lo que hará que las pequeñas terminaciones nerviosas reaccionen al sonido.

2. Diferenciación parcial

A partir de este capítulo, a menudo tendremos que usar la notación de diferenciación parcial. Cuando se trata de una función de una sola variable, $y = f(x)$ digamos, escribimos el coeficiente diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}, \tag{1}$$

pero si consideramos una función de dos o más variables, el valor de esta función variará con un cambio en cualquiera o en todas las variables. Por ejemplo, el valor de la coordenada z en la superficie de una esfera cuya ecuación es $x^2+y^2+z^2 = a^2$, donde a es el radio de la esfera, dependerá de x e y para que z sea una función de x y y dado $z = z(x, y)$. El cambio diferencial de z que se deriva de un cambio de x e y puede escribirse

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy, \tag{2}$$

donde $(\partial z/\partial x)_y$ significa diferenciar z con respecto a x mientras que y se mantiene constante, de modo que

$$\frac{\partial z}{\partial x}_y = \lim_{\delta x \to 0} \frac{z(x+\delta x, y) - z(x, y)}{\delta x}. \tag{3}$$

El cambio total dz se encuentra sumando los incrementos separados debido al cambio de cada variable a su vez, mientras que las otras se mantienen constantes. En la Figura 1 podemos ver que mantener constante y aísla un plano que corta la superficie esférica en una línea curva, y la contribución incremental a dz a lo largo de esta línea es exactamente como si z fuera una función de x solamente. Ahora, al mantener constante x giramos el plano a través de 90° y repetimos el proceso con y como variable para que el incremento total de dz sea la suma de estos dos procesos. Si solo intervienen dos variables independientes, el subíndice que muestra qué variable se mantiene constante se omite sin ambigüedad.

En el movimiento ondulatorio, nuestras funciones serán las de las variables de distancia y tiempo, y escribiremos $\partial/\partial x$ y $\partial^2/\partial x^2$ para la primera o segunda derivada con respecto a x, mientras que el tiempo t permanece constante.

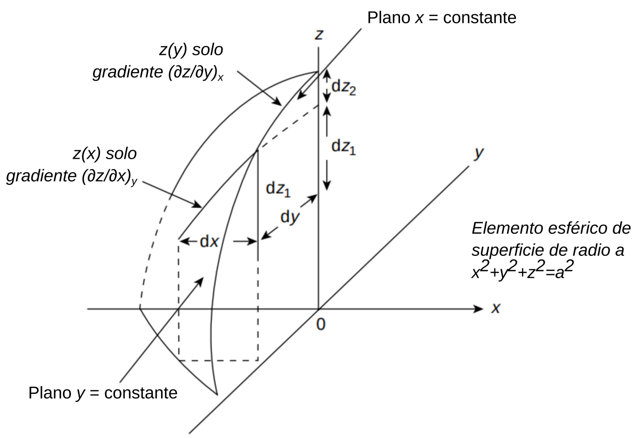

Fig. 1: Pequeño elemento de una superficie esférica que muestra $dz = dz_1 + dz_2 = (\partial z/\partial x)_y\, dx + (\partial z/\partial y)_x\, dy$ donde cada gradiente se calcula con una variable restante considerada constante.

Nuevamente, $\partial/\partial t$ y $\partial^2/\partial t^2$ denotarán primera y segunda derivadas con respecto al tiempo, lo que implica que x se mantiene constante.

3. Ondas

Una de las formas más simples de demostrar el movimiento de las ondas es tomar el extremo suelto de una cuerda larga que está fija en el otro extremo y mover el extremo suelto rápidamente hacia arriba y hacia abajo. Las crestas y los canales de las ondas se mueven hacia abajo de la cuerda, y si la cuerda fuera infinitamente larga, tales ondas se llamarían ondas progresivas; estas son ondas que viajan en un medio ilimitado libre de posibles reflejos (Figura 5.2).

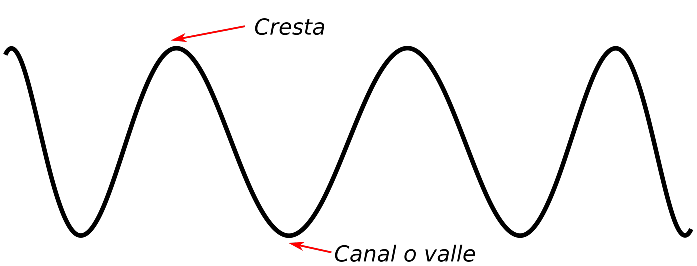

Fig. 2: Ondas transversales progresivas que se mueven a lo largo de una cuerda.

Si el medio tiene una extensión limitada; por ejemplo, si la cuerda se redujera a una cuerda de violín, fijada en ambos extremos, las ondas progresivas que viajan en la cuerda se reflejarían en ambos extremos; la vibración de la cuerda sería la combinación de tales ondas moviéndose de un lado a otro a lo largo de la cuerda y se formarían **ondas estacionarias**.

Las ondas en las cuerdas son **ondas transversales** donde los desplazamientos u oscilaciones en el medio son transversales a la dirección de propagación de la onda. Cuando las oscilaciones son paralelas a la dirección de propagación de las ondas, las **ondas son longitudinales**. Las ondas sonoras son ondas longitudinales; un gas solo puede sostener ondas longitudinales porque las ondas transversales requieren una fuerza de corte para mantenerlas. Ambas ondas transversales y longitudinales pueden viajar en un sólido.

En este capítulo vamos a discutir solo las **ondas planas**. Cuando vemos el movimiento ondulatorio como una serie de crestas y canales, de hecho estamos observando el movimiento vibratorio de los osciladores individuales en el medio, y en particular todos estos osciladores en un plano del medio que, en el instante de observación, tiene la misma fase en sus vibraciones.

Si tomamos un plano perpendicular a la dirección de propagación de ondas y todos los osciladores que se encuentran dentro de ese plano tienen una fase común, observaremos con el tiempo cómo ese plano de fase común progresa a través del medio. Sobre dicho plano, todos los parámetros que describen el movimiento de la onda permanecen constantes. Las crestas y los canales son planos de amplitud máxima de oscilación que están desfasados; una cresta es un plano de máxima amplitud positiva, mientras que un canal es un plano de máxima amplitud negativa. Al formular dicho movimiento ondulatorio en términos matemáticos, tendremos que relacionar la diferencia de fase entre dos planos cualquiera con su separación física en el espacio. En principio, ya lo hemos hecho en nuestra discusión sobre los osciladores.

Las **ondas esféricas** son ondas en las que las superficies de la fase común son esferas y la fuente de ondas es un punto central, por ejemplo una explosión; cada superficie esférica define un conjunto de osciladores sobre los cuales la perturbación radiante ha impuesto una fase común en la vibración. En la práctica, las ondas esféricas se convierten en ondas planas después de viajar una distancia muy corta. Una pequeña sección de una superficie esférica es una aproximación muy cercana a un plano.

4. Velocidades en movimiento ondulatorio

Al principio debemos ser muy claros sobre un punto. Los osciladores individuales que forman el medio no progresan a través del medio con las ondas.

Su movimiento es armónico simple, limitado a oscilaciones, transversales o longitudinales, sobre sus posiciones de equilibrio. Son sus relaciones de fase las que observamos como ondas, no su movimiento progresivo a través del medio.

Hay tres velocidades en el movimiento ondulatorio que son bastante distintas aunque están conectadas matemáticamente. Son

1. La **velocidad de la partícula**, que es la velocidad armónica simple del oscilador sobre su posición de equilibrio.

2. La **velocidad de onda o fase**, la velocidad con la que los planos de fase igual, crestas o valles, progresan a través del medio.

3. La **velocidad del grupo**. Se pueden superponer varias ondas de diferentes frecuencias, longitudes de onda y velocidades para formar un grupo. Las ondas rara vez ocurren como componentes monocromáticos únicos; un pulso de luz blanca consiste en un espectro infinitamente fino de frecuencias y el movimiento de dicho pulso se describiría por su velocidad de grupo. Tal grupo, por supuesto, se "dispersaría" con el tiempo porque la velocidad de onda de cada componente sería diferente en todos los medios, excepto en el espacio libre. Solo en el espacio libre permanecería como luz blanca. Discutiremos la velocidad del grupo como un tema separado en una sección posterior de este capítulo. Su importancia es que es la velocidad con la que se transmite la energía en el grupo de ondas. Para una onda monocromática, la velocidad del grupo y la velocidad de la onda son idénticas. Aquí nos concentraremos en las partículas y las velocidades de onda.

5. La ecuación de onda

Esta ecuación dominará el resto de este texto y la derivaremos, en primer lugar, considerando el movimiento de las ondas transversales en una cuerda.

Consideraremos el desplazamiento vertical y de una sección muy corta de una cuerda uniforme.

Esta sección realizará movimientos armónicos simples verticales; Es nuestro oscilador simple. El desplazamiento y, por supuesto, variará con el tiempo y también con x, la posición a lo largo de la cuerda en la que elegimos observar la oscilación.

Por lo tanto, la ecuación de onda relacionará el desplazamiento y de un oscilador único con la distancia x y el tiempo t. Consideraremos las oscilaciones solo en el plano del papel, de modo que nuestras ondas transversales en la cuerda estén polarizadas en el plano.

La masa de la cuerda uniforme por unidad de longitud o su densidad lineal es ρ, y existe una tensión constante T en toda la cuerda aunque es ligeramente extensible.

Esto requiere que consideremos una longitud tan corta y oscilaciones tan pequeñas que podamos linealizar nuestras ecuaciones. El efecto de la gravedad será descuida.

Por lo tanto, en la figura 3, las fuerzas que actúan sobre el elemento curvo de longitud ds son T en un ángulo θ con respecto al eje en un extremo del elemento, y T en un ángulo $\theta + d\theta$ en el otro extremo. La longitud del elemento curvo es

$$
\begin{aligned}
ds^2 = \lim_{dx\to 0} s^2 &= \lim_{dx\to 0} [y(x+dx)-y(x)]^2 + (dx)^2 \\
&= \lim_{dx\to 0} \left[\frac{[y(x+dx)-y(x)]^2}{(dx)^2} + 1 \right] dx^2 \\
&= \lim_{dx\to 0} \left[\left(\frac{y(x+dx)-y(x)}{dx} \right)^2 + 1 \right] dx^2 \qquad (4)
\end{aligned}
$$

o bien

$$
ds = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, dx. \qquad (5)
$$

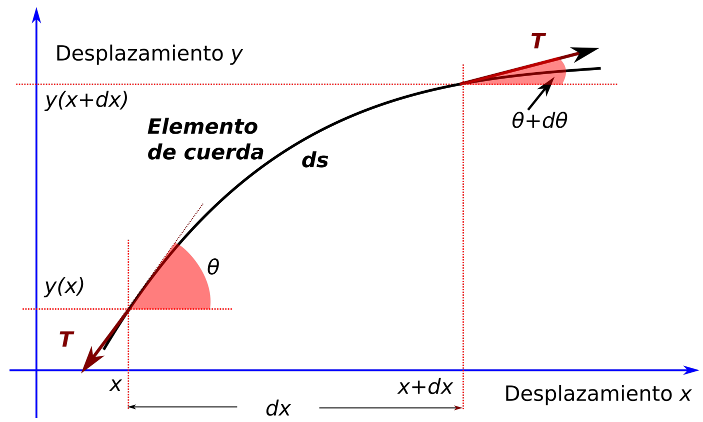

Fig. 3: Elemento desplazado de cuerda de longitud $ds \approx dx$ con tensión T que actúa en ángulo θ en x y $\theta + d\theta$ en $x + dx$.

Pero dentro de las limitaciones impuestas $(\partial y/\partial x)$ es tan pequeño que ignoramos su cuadrado y tomamos $ds = dx$. La masa del elemento de cuerda es, por lo tanto, $\rho ds = \rho dx$. Su ecuación de movimiento se encuentra en la Ley de Newton, la fuerza es igual a la masa por la aceleración. La fuerza perpendicular sobre el elemento dx es $T\sin(\theta + d\theta) - T\sin\theta$ en la dirección positiva y, que es igual al producto de ρdx (masa) y $\partial^2 y/\partial^2 t$ es su aceleración.

Como θ es muy pequeño, $\sin\theta \approx \tan\theta = \partial y/\partial x$, entonces la fuerza viene dada por

$$
F_{neta} = T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+dx} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x} \right], \qquad (6)
$$

donde los subíndices se refieren al punto en el que se evalúa la derivada parcial. La diferencia entre los dos términos en el paréntesis define el coeficiente diferencial de la derivada parcial $\partial y/\partial x$ multiplicada por el intervalo de espacio dx, de modo que la fuerza es

$$
F_{neta} = T\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) dx, \qquad (7)
$$

y por lo tanto juntando todo tenemos que

$$
T\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) dx = \rho dx \left(\frac{\partial^2 y}{\partial^2 t}\right) \to \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial^2 t}, \qquad (8)
$$

pero dándose cuenta que la densidad lineal de cuerda ρ tiene unidades de kg/m y la tensión T tiene unidades de Newtons, entonces es claro que el término ρ/T tiene unidades de (kg/m)/(kg m/s^2), o sea unidades de (s/m)^2, o sea que podemos ver que este término es en realidad una unidad de inversa de velocidad al cuadrado, por lo cual podemos escribir conveientemente que

$$
\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial^2 t}. \qquad (9)
$$

ESTA ES LA ECUACIÓN DE ONDA. Relaciona la aceleración de un oscilador armónico simple en un medio con la segunda derivada de su desplazamiento con respecto a su posición, x, en el medio. La posición del término v^2 en la ecuación siempre se muestra mediante un análisis dimensional rápido.

Hasta ahora no hemos establecido explícitamente qué representa velocidad v. Veremos que es la velocidad de onda o fase, la velocidad con la que se propagan los planos de fase común. En la cuerda, la velocidad surge como la relación entre la tensión y la densidad de inercia de la cuerda.

Veremos, cualesquiera que sean las ondas, que la velocidad de la onda siempre se puede expresar en función de la elasticidad o mecanismo de almacenamiento de energía potencial en el medio y la inercia del medio a través del cual se almacena su energía cinética o inductiva. Para las ondas longitudinales en un sólido, la elasticidad se mide por el módulo de Young, en un gas por γP, donde γ es la relación de calor específico y P es la presión del gas.

Para ondas de sonido en un fluido como el aire o el agua, la velocidad v viene dada por

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}, \tag{10}$$

donde ρ es la densidad de equilibrio del medio y B es el módulo de masa, o módulo de Young para la masa. Es decir, podemos ver que, en general, la velocidad de las ondas depende de una propiedad elástica del medio (la tensión para ondas de cuerda y el módulo de masa para ondas de sonido) y de una propiedad inercial del medio (la densidad de masa lineal o la densidad de masa de volumen).

Para ondas de sonido en un gas como el aire, el módulo de volumen es proporcional a la presión, que a su vez es proporcional a la densidad ρ y a la temperatura absoluta del gas. La relación B/ρ es, por lo tanto, independiente de la densidad y es simplemente proporcional a la temperatura absoluta. Luego podemos mostrar que, en este caso, la ecuación anterior para la velocidad es equivalente a

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}, \tag{11}$$

donde T es la temperatura absoluta medida en grados Kelvin (K). La constante γ depende del tipo de gas. Para moléculas diatómicas, como 0_2 y N_2, γ tiene el valor 1.4, y dado que 0_2 y N_2 comonen el 98 por ciento de la atmósfera, ese es el valor para el aire. (Para moléculas monoatómicas como He, γ tiene el valor 1.67). La constante R es la constante universal de los gases y vale $R = 8.314$ J/(mol K) y M es la masa molar del gas (es decir, la masa de 1 mol del gas), que para el aire es $M = 29 \times 10^{-3}$ kg/mol.

Ejemplo: Una hormiga escapando de un pulso.

Suponga que usted imaginala siguiente situación. Una hormiga se encuentra caminando sobre la cuerda de un tendedero de ropa de 25 m de longitud la cual tiene una masa de 0.25 kg y se mantiene tensa por un objeto colgante de 10 kg de masa en uno de los extremos. Imagine que usted está colgando una prenda a 5 m de uno de los extremos cuando se hace consciente de que la hormiga se encuentra llegando al otro extremo. Entonces usted quiere hacer caer la hormiga para lo cual arrastra la cuerda 3 cm de su posición de equilibrio y la suelta generando un pulso. Suponiendo que la hormiga se mueve a 2.5 cm/s, nos preguntamos si ¿llegará al final del tendedero la hormiga antes de que le llegue el pulso?

Solución: Dado que la velocidad de la onda que se genera debido a la perturbación que se ha hecho depende básicamente de las características de la cuerda (recuerde que $v^2 = T/\rho$), entonces podemos calcular la velodidad con la que se mueve el pulso o lo que es lo mismo la velocidad de la onda. En este caso tendremos que

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}} = \sqrt{\frac{10 \times 9.8 \text{ Nw}}{(0.25/25) \text{ kg/m}}} = 98.99 \text{ m/s}.$$

Ahora entonces podemos calcular el tiempo que le llevaría a la onda llegar hasta el extremo opuesto, en este caso tendremos que podemos soponer esta velocidad constante, con lo cual $\Delta t_{pulso} = x/v = 20/98.99 = 0.20$ s. Mientras que el tiempo que le toma a la hormiga llegar al extremo con su velocidad de 2.5 m/s es de $\Delta t_{hormiga} = 2.5/2.5 = 1$ s. Es claro que como la hormiga le toma un tiempo mayor del que le toma a la onda alcanzar el otro extremo, entonces la hormiga será barrida por la onda.

Ejemplo: Velocidad del sonido en términos de la temperatura.

Calcule la velocidad del sonido en el aire a (a) O °C y (b) 20 °C.

Solución: En este caso véase que dado que existe una relación entre la velocidad del sonido a favor de la temperatura tendremos que para el aire $M = 2.9 \times 10^{-3}$ kg/mol y la constante universal de los gases es $R = 8.314$ J/(mol kg), con lo cual para cero grados centrígrados (o 273 K)

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT_i}{M}} = \sqrt{\frac{1.4 \times 8.314 \times 273}{29 \times 10^{-3}}} \text{ m/s} = 331.017 \text{ m/s}.$$

Mientras que para el caso de 20 °C (o 297 K), tendríamos que

$$v_{273} = \sqrt{\frac{\gamma RT_{273}}{M}}, \quad v_{293} = \sqrt{\frac{\gamma RT_{293}}{M}}$$
$$\frac{v_{293}}{v_{273}} = \sqrt{\frac{T_{293}}{T_{273}}} \rightarrow v_{293} = v_{273}\sqrt{\frac{T_{293}}{T_{273}}}$$
$$v_{293} = 331.017\sqrt{\frac{293}{273}} \text{ m/s} = 342.928 \text{ m/s}.$$

6. Solución de la ecuación de onda

La solución de la ecuación de onda 9 será, por supuesto, una función de las variables x y t. Vamos a mostrar que cualquier función de la forma $y = f_1(vt - x)$ es una solución. Además, cualquier función $y = f_2(vt + x)$ será también una solución por lo que, en general, su superposición $y = f_1(vt - x) + f_2(vt + x)$ será también la solución completa.

Tomando en consideración $y = f_1$ es fácil ver que $\partial y/\partial x = -\partial f_1/\partial x$, y por lo tanto $\partial^2 y/\partial x^2 = \partial^2 f_1/\partial x^2$, mientras que $\partial y/\partial t = v\partial f_1/\partial t$ y por su puesto $\partial^2 y/\partial t^2 = v^2 \partial^2 f_1/\partial t^2$, entonces es claro que $\partial^2 y/\partial t^2 = v^2 \partial^2 y/\partial x^2$ implica $\partial^2 f_1/\partial t^2 = v^2 \partial^2 f_1/\partial x^2$. Lo mismo sucede para f_2, por lo tanto está claro que tanto $y = f_1(vt - x)$ como $y = f_2(vt + x)$ son soluciones de la ecuación de onda 9.

Si y es el desplazamiento armónico simple de un oscilador en la posición x y tiempo t, esperaríamos poder expresarlo en la forma $y = A\sin(\omega t + \phi)$, y de hecho todas las ondas que discutimos en este libro se describirá mediante funciones seno o coseno.

El término $vt \pm x$ en la expresión $y = f(vt \pm x)$ tiene las dimensiones de una longitud y, para que la función sea un seno o coseno tenga unidades correctas y argumentos correctos, su argumento debe tener las dimensiones de radianes, de modo que $vt \pm x$ debe ser multiplicado por un factor $2\pi/\lambda$, donde λ es una ongitud que debe ser definida.

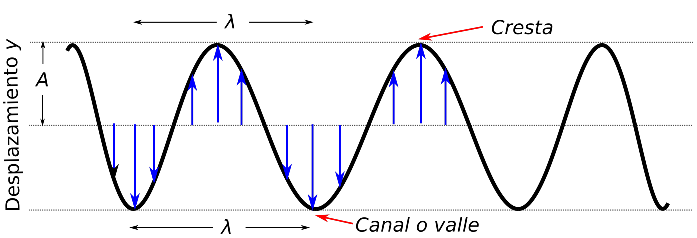

Fig. 4: Esquema de los desplazamientos del oscilador en un medio continuo a medida que una onda pasa sobre ellos viajando en la dirección x positiva. La longitud de onda se define como la distancia entre dos osciladores cualquiera que tenga una diferencia de fase de 2π rad.

Ahora podemos escribir entonces

$$y = A\sin(\omega t + \phi) = A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)\right), \tag{12}$$

como solución a la ecuación de onda si $2\pi v/\lambda = 2\omega = 2\pi f$, donde f es la frecuencia de oscilación y $\phi = 2\pi x/\lambda$.

Esto significa que si una onda, moviéndose hacia la derecha, pasa sobre los osciladores en un medio y se toma una fotografía en el tiempo $t = 0$, el lugar geométrico de los desplazamientos del oscilador (Figura 4) estará dado por la expresión (12). Si ahora observamos el movimiento del oscilador en la posición $x = 0$, estará dado por $y = a\sin\omega t$.

Cualquier oscilador a su derecha en alguna posición x se pondrá en movimiento en algún momento posterior por la onda que se mueve hacia la derecha; esta movimiento será dado por (12) teniendo un retraso de fase ϕ con respecto al oscilador en $x = 0$. Este retraso de fase $\phi = 2\pi x/\lambda$, será 2π si $x = \lambda$, es decir, equivalente en exactamente una vibración completa de un oscilador.

Esto se define como la **longitud de onda**, la separación en el espacio entre dos osciladores cualquiera con una diferencia de fase de 2π radianes. La expresión $2\pi v/\lambda = 2\omega = 2\pi f$ da como resultado que $v = \lambda f$, donde v, es la velocidad de onda o fase, es el producto de la frecuencia y la longitud de onda. Por lo tanto, $\lambda/v = 1/f = \tau$, donde τ es el período de oscilación, que muestra que la onda viaja una longitud de onda en este tiempo. Un observador en cualquier punto pasaría por f longitudes de onda por segundo, una distancia por unidad de tiempo igual a la velocidad c de la onda.

Si la onda se mueve hacia la izquierda, el signo de cambia porque la oscilación en x comienza antes que en $x = 0$. Por lo tanto, el paréntesis $vt - x$ denota una onda moviendose a la derecha y $vt + x$ denota una onda moviendose a la izquierda en el eje x negativo.

Hay varias expresiones equivalentes para $y = f(vt \pm v)$ que enumeramos aquí como funciones seno, aunque las funciones coseno son igualmente válidas. Son:

$$\begin{aligned} y &= A\sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt \pm x) = A\sin 2\pi\left(ft \pm \frac{x}{\lambda}\right) \\ &= A\sin\omega\left(t \pm \frac{x}{v}\right) = A\sin\left(\omega t \pm kx\right), \end{aligned} \tag{13}$$

donde $k = 2\pi/\lambda = \omega/v$ se llama **número de onda**; también tendríamos equivalentemente $y = e^{i(\omega t \pm kx)}$, la representación exponencial de ambos seno y coseno.

Cada una de las expresiones anteriores es una solución a la ecuación de onda que proporciona el desplazamiento de un oscilador y su fase con respecto a algún oscilador de referencia. Los cambios de los desplazamientos de los osciladores y la propagación de sus fases son lo que observamos como movimiento ondulatorio.

La **velocidad de onda** o fase es, por supuesto, $\partial x/\partial t$, es la velocidad a la cual la perturbación se mueve a través de los osciladores; mientras que la **velocidad de la partícula** es la velocidad armónica simple $\partial y/\partial t$.

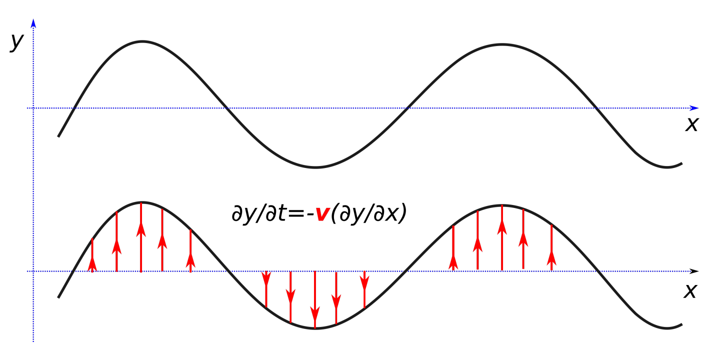

Fig. 5: La magnitud y dirección de la velocidad de la partícula $\partial y/\partial t = -v\,(\partial y/\partial x)$ en cualquier punto x se muestra mediante una flecha en la onda sinusoidal derecha arriba.

Al elegir cualquiera de las expresiones anteriores para una onda derecha, por ejemplo $y = A\sin(\omega t \pm kx)$ tenemos que $\partial y/\partial t = A\omega\cos(\omega t \pm kx)$ y $\partial y/\partial x = \pm kA\cos(\omega t \pm kx)$, de manera que

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \pm\frac{\omega}{k}\frac{\partial y}{\partial x} = \pm v\frac{\partial y}{\partial x}\left(= \pm\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial x}\right). \tag{14}$$

Por lo tanto, la velocidad de partícula $\partial y/\partial t$ se da como el producto de la velocidad de onda $v = (\partial y/\partial t)$ y el gradiente del perfil de onda precedido por un signo negativo para una onda que va hacia la derecha y positivo para una onda que va hacia la izquierda.

En la Figura 5, las flechas muestran la dirección de la velocidad de la partícula en varios puntos de la onda que va hacia la derecha. Es evidente que la velocidad de la partícula aumenta en la misma dirección que la fuerza transversal en la onda y veremos en la siguiente sección que esta fuerza viene dada por $-T\partial y/\partial x$, donde T es la tensión de la cuerda.

Ejemplo: Una onda viajera.

La función de onda para una onda armónica en una cuerda es $y(x,t) = 0.03\sin(2.2x - 3.5t)$. (a) ¿En qué dirección viaja esta onda y cuál es su velocidad? (b) Encuentre la longitud de onda, frecuencia y período de esta onda. (c) ¿Cuál es el desplazamiento máximo de cualquier segmento de cuerda? (d) ¿Cuál es la velocidad máxima de cualquier segmento de cuerda corta?

Solución: Primero que nada debemos recordar que en la expresión de la onda $y(x,t)$ del enunciado el factor 0.03 tiene unidades de metros, mientras que el factor que acompaña a x y t en el argumento de la función seno tienen unidades de m^{-1} y s^{-1}, respectivamente. Si comparamos con la forma de la onda en la expresión (13) nos damos cuenta que en realidad la amplitud es $A = 0.03$ m, la frecuencia angular es $\omega = 3.5$ s^{-1} y el número de onda $k = 2.2\ \mathrm{m}^{-1}$ y además sabemos que es un onda que se mueve hacia la derecha en el sentido del eje X positivo en virtud del signo negativo que aparece antes de ω.

Luego, la velocidad de la onda está dada por

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda}{2\pi}\frac{2\pi}{T} = \frac{\omega}{k} = \frac{3.5}{2.2}\ \mathrm{m/s} = 1.59\ \mathrm{m/s}.$$

Por otro lado, tenemos que $\lambda = 2\pi/k = 2.86$ m, mientras que el periodo es $T = 2\pi/\omega = 1.80$ s, y por su puesto, la frecuencia es $f = 1/T = 0.557$ Hz. Es decir, las partículas que están oscilando en la descripción del movimiento están en la misma fase cada 2.86 m y significa que el tiempo que tarda una partícula en realizar una oscilación completa es de 1.8 s.

El desplazamiento máximo viene dado por la amplitud $A = 0.03$ m, mientras que la velocidad másxima se consigue haciendo

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = (0.03\times 3.5)\cos(2.2x - 3.5t)\,,$$

y por lo tanto la velocidad máxima es $v_y^{max} = 0.105$ m/s.