Cálculo de campos eléctricos para disribuciones continuas de carga

D. Sierra-Porta

Índice

1. Introducción

En cursos anterior nuestra descripción de la naturaleza se ha hecho por pasos, resolviendo problemas pequeños para luego generalizar a problemas más complejos y delicados. Ese es el caso de cuando se estudiaban distribuciones de masa puntuales y se pensaba, por ejemplo, en las condiciones para la estática de dichos cuerpos. En este caso, dado que se suponen masas puntuales, se comprobaban las condiciones para las cuales $\sum F_i = 0$. Sin embargo, cuando un sistema se componía de muchas de estas masas puntuales, decíamos que estábamos en presencia de un cuerpo rígido, es decir, de un sistema en el cual el número de partículas que lo componen es muy grande, en este caso, por ejemplo, se definía un punto en el cual se suponía que toda la masa estaba contenida. Decíamos que este punto se llama centro de masa. Además muchas veces suponíamos que la masa (m) estaba distribuida uniformemente, en este caso teníamos los siguientes casos

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{m}{L}, \quad \text{densidad lineal de masa} \\ \sigma &= \frac{m}{A}, \quad \text{densidad superficial de masa} \\ \rho &= \frac{m}{V}, \quad \text{densidad volumétrica de masa} \end{aligned}$$

En electricidad acostumbramos a copiar los conceptos importantes para irlo incorporando a nuestra descripción del fenómeno eléctrico. Una distribución continua de carga a diferencia de una distribución discreta de carga se caracteriza por tener muchas partículas que la constituyen. En este caso si la distribución de carga decimos que está distribuida uniformemente, entonces decimos que puede ser caracterizada a partir de una densidad de carga uniforme, o mejor dicho,

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{q}{L}, \quad \text{densidad lineal de carga} \\ \sigma &= \frac{q}{A}, \quad \text{densidad superficial de carga} \\ \rho &= \frac{q}{V}, \quad \text{densidad volumétrica de carga} \end{aligned}$$

donde q es la carga del objeto extendido.

La idea de estas notas es demostrar como es la metodología para el cálculo del campos eléctricos para distribuciones continuas de carga distribuidas uniformemente.

Vamos a trabajar en los campos eléctricos debido a las densidades de carga de línea y superficie. Para simplificar, en nuestros ejemplos anteriores con cargos discretos consideramos situaciones muy simétricas. Aquí consideraremos primero un enfoque muy numérico. Se adapta al caso donde la distribución de la carga es completamente arbitraria (y potencialmente complicada).

2. Una linea de carga uniforme

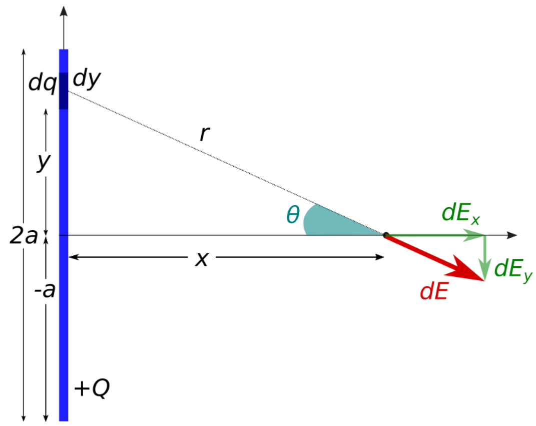


Fig. 1: Campo eléctrico para una distribución de carga linealmente distribuida.

Consideremos una distribución de carga uniformemente distribuida en una linea como se muestra en la figura 1 y queremos calcular el campo eléctrico en un punto a lo largo de la mitad de la linea a una distancia x. Dado que la distribución es continua podemos suponer un elemento de carga pequeño, un diferencial de carga (dq), y debido a la distribución este tendrá una medida dy.

Dado este diferencial de carga podemos aplicar la ley de Coulomb de tal manera que

$$dE = k\frac{dq}{r^2}. \tag{1}$$

Ahora bien, debido a la geometría que vemos en la figura 1, vemos que dE tiene dos componentes, de tal manera que $dE = dE_x\hat{x} + dE_y\hat{y}$. En este caso tendremos que

$$dE_x = dE\cos\theta = k\frac{dq}{r^2}\cos\theta = k\frac{\lambda dy}{y^2+x^2}\frac{x}{(y^2+x^2)^{1/2}}, \tag{2}$$

o sea que

$$dE_x = \frac{k\lambda x dy}{(y^2+x^2)^{3/2}}. \tag{3}$$

Luego integrando desde $-a$ hasta a queda que

$$E_x = \int_{-a}^{a}\frac{k\lambda x dy}{(y^2+x^2)^{3/2}} = \frac{2ka\lambda}{x(a^2+x^2)^{1/2}}, \tag{4}$$

y como de nuevo $\lambda = Q/(2a)$, entonces

$$E_x = \frac{kQ}{x(a^2+x^2)^{1/2}}. \tag{5}$$

Una simple inspección pudiera determinar que las contribuciones de E_y se cancelarán para cada par de diferenciales de carga que se tomen en la linea de carga en posiciones simétricamente opuestas, sin embargo siguiendo el mismo procedimiento que en el caso de E_x e integrando se vera que $E_y = 0$. Luego el campo eléctrico generado por la linea de carga a una distancia x es entonces

$$E = E_x\hat{x} = \frac{kQ}{x(a^2+x^2)^{1/2}}\hat{x} = \frac{2k\lambda}{x\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2}}\hat{x}. \tag{6}$$

Cuando $a \to 0$, entonces el campo eléctrico $E \to kQ/x^2$, lo que es esperado debido a que para una longitud de la linea de corriente tan pequeña esta se verá como una carga puntual y entonces estará de acuerdo con la ley de Coulomb para cargas puntuales. Por el contrario cuando $a \to \infty$ o mejor cuando $a >> x$ (linea de carga casi infinita), el campo eléctrico tiende a

$$E = E_x \hat{x} = \frac{2k\lambda}{x} \hat{x}. \tag{7}$$

3. Campo eléctrico de un aro circular delgado

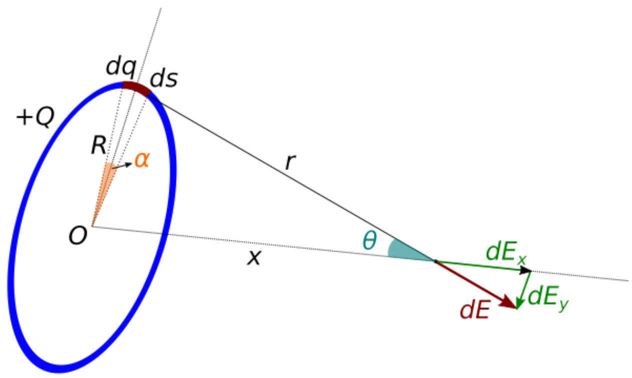


Fig. 2: Campo eléctrico para una distribución de carga circular delgada linealmente distribuida.

Imagínese que la linea de carga del ejemplo anterior se dobla para tomar forma circular, un aro de carga uniformemente distribuida como en la figura 2, el radio de la distribución es R. Como en el caso anterior, el campo eléctrico tiene dos componentes, sin embargo, es fácil ver que las componentes en E_y deben cancelarse debido a la simetría de la distribución por la consideración de dos elementos de carga diametralmente opuestos, por lo que la integral debe ser cero.

Entonces siguiente un procedimiento como el anterior, tendremos que

$$dE_x = dE \cos\theta = k\frac{dq}{r^2} \cos\theta = k\frac{\lambda ds}{R^2 + x^2} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}}. \tag{8}$$

El elemento de longitud es ahora un arco de circunferencia de radio R y sustendido por un ángulo α, por ejemplo. Entonces la longitud ds es igual a $Rd\alpha$, por lo tanto tenemos que $E_x = \int dE_x$

$$E_x = \int_0^{2\pi} \frac{k\lambda R x d\alpha}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{2\pi k\lambda R x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{kQx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}. \tag{9}$$

En el paso anterior hemos nuevamente considerado que $\lambda = Q/\ell = Q/(2\pi R)$.

Entonces concluyendo podemos ver que cuando R es muy grande ($R \to \infty$), entonces el campo eléctrico es nulo, lo cual es lógico y esto es análogo a que se calcule el campo eléctrico en el centro de la distribución. Mientras tanto para $x >> R$ ($R \sim 0$), entonces nuestra cálculo coincide con la ley de Coulomb perfectamente.

4. Campo eléctrico para un plato circular cargardo

Considere ahora el cálculo del campo eléctrico de un disco circular uniformemente cargado con carga $+Q$. Queremos calcular el campo eléctrico a una distancia x del eje del disco. Este problema es similar a los anteriores. En este caso vamos a suponer que la cargar está uniformemente distribuida en la superficie del disco. Entonces tenemos que $\sigma = Q/(Area)$, con lo cual $dq = \sigma dA = \sigma d(\pi r^2) = 2\pi\sigma r dr$.

Luego haciendo un procedimiento similar a los anteriores, vemos de nuevo que todas las componentes E_y se ven canceladas debido a la simetría. Por lo tanto

$$E_x = \int_0^R \frac{2k\pi\sigma x r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = 2k\pi\sigma x \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}}, \tag{10}$$

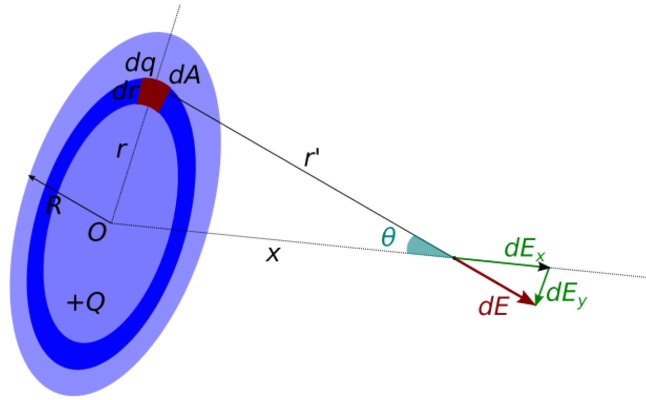


Fig. 3: Campo eléctrico para un plato de carga circular linealmente distribuida.

por lo tanto

$$E_x = -\frac{2k\pi\sigma x}{(r^2+x^2)^{1/2}}\Big|_0^R = 2k\pi\sigma\left[1-\frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}}\right], \tag{11}$$

esto puede resumirse más si nuevamente hacemos que $\sigma = Q/(\pi R^2)$ y además recordamos que $k = (4\pi\epsilon_0)^{-1}$, entonces

$$E_x = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2}\left[1-\frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}}\right] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[1-\frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}}\right]. \tag{12}$$

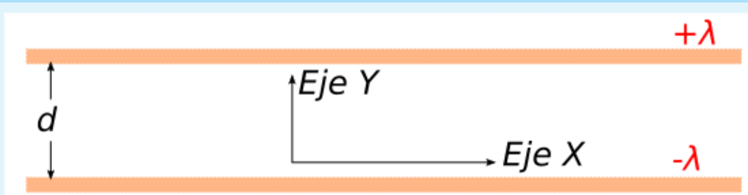
Supongamos que seguimos aumentando el radio R del disco, agregando simultáneamente carga para que la densidad de carga superficial σ (carga por unidad de área) sea constante. En el límite de que R es mucho mayor que la distancia x del punto de campo desde el disco, el segundo término en corchetes es prácticamente cero, entonces se tiene que

$$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \tag{13}$$

Nuestro resultado final no contiene la distancia x desde el plano. Por lo tanto, el campo eléctrico producido por una hoja de carga infinita es independiente de la distancia desde el disco. La dirección del campo está en todas partes perpendicular a la hoja, lejos de ella. No existe un disco de carga infinita, pero si las dimensiones de disco son mucho mayores que la distancia x del punto desde el disco, el campo está casi dado por la ecuación anterior.

Si el punto está a la izquierda del plano ($x < 0$), el resultado es el mismo, excepto que la dirección de E es hacia la izquierda en lugar de hacia la derecha. Si la densidad de carga superficial es negativa, las direcciones de los campos a ambos lados del disco son hacia ella en lugar de alejarse de ella. Este es un resultado muy importante y será muy conveniente luego para el desarrollo de dispositivos como condensadores eléctricos.

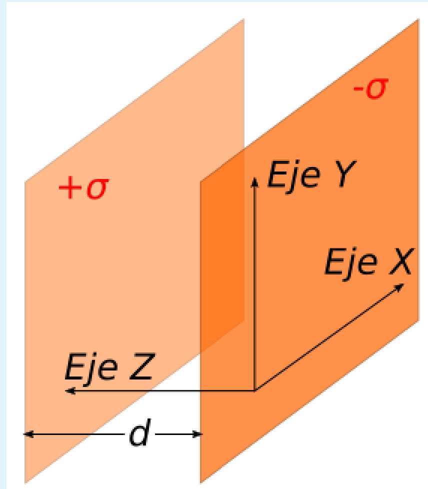
Ejemplo: Campo eléctrico debido a dos lineas de carga uniforme.



Considere dos lineas infinitas de carga uniforme que se colocan paralelas entre sí, separadas por una distancia d. La lámina inferior tiene una densidad de carga lineal positiva uniforme λ, y la lámina superior tiene una densidad de carga lineal negativa uniforme $-\lambda$ con la misma magnitud. Encuentre el campo eléctrico entre las dos lineas, encima de la linea superior y debajo de la linea inferior.

Se deja de ejercicio.!

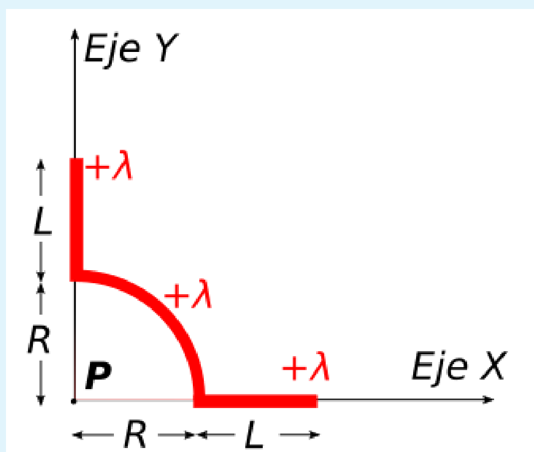
Ejemplo: Campo eléctrico debido a dos placas de carga uniforme.



Considere dos placas planas infinitas que se colocan paralelas entre sí, separadas por una distancia d. La lámina izquierda tiene una densidad de carga superficial positiva uniforme σ, y la lámina derecha tiene una densidad de carga superficial negativa uniforme $-\sigma$ con la misma magnitud. Encuentre el campo eléctrico entre las dos placas, y también en el exterior de la zona intermedia entre las placas.

Se deja de ejercicio.!

Ejemplo: Campo eléctrico debido a otra distribución de carga continua.



Considere la distribución de la imagen. Encuentre el campo eléctrico en el punto **P** en el centro del eje de coordenadas, conociendo que tienen densidad de carga distribuidas linealmente y que el arco tiene un radio R y las lineas rectas tienen una longitud L.

Se deja de ejercicio.!

Nota final

Todo lo que está escrito en estas notas representan unas guías que este servidor ha escrito para estimular la discusión y motivar el inicio del estudio de algunos tópicos vistos en clases, por lo que invitamos a todos a profundizar en estos temas y no quedarse sólo con la visión presentada en estas notas.